

51

М-34

92



ВЫПУСК

# Библиотечка КВАНТ

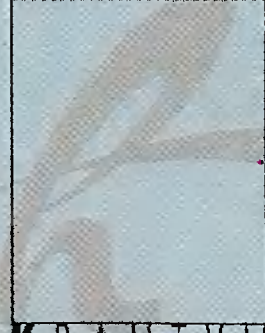
*Задачник «Кванта»*

## МАТЕМАТИКА

*часть 1*



Б Ю Р О



КВАНТУМ





БИБЛИОТЕЧКА  
**КВАНТ**  
ВЫПУСК

**92**

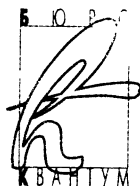
Приложение к журналу  
«Квант» №6/2005

*Задачник «Кванта»*

# МАТЕМАТИКА

*часть 1*

*Под редакцией Н. Б. Васильева*



Москва  
2005

УДК 51(07671)  
ББК 22.1  
З-90

Серия  
«Библиотечка «Квант»  
основана в 1980 г

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Б.М.Болотовский, А.А.Варламов, В.Л.Гинзбург,  
Г.С.Голицын, Ю.В.Гуляев, М.И.Каганов, С.С.Кротов,  
С.П.Новиков, Ю.А.Осипьян (председатель),  
В.В.Произволов, Н.Х.Розов, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов,  
А.И.Черноуцан (ученый секретарь)

**З-90 Задачник «Кванта». Математика. Часть 1** / Под редакцией  
Н.Б.Васильева. – М.: Бюро Квантум, 2005. – 192 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 92. Приложение к журналу «Квант»  
№ 6 / 2005.)

ISBN 5-85843-057-0

В книге собраны задачи по математике из раздела «Задачник «Кванта» за первые 13 лет существования журнала «Квант» (1970 – 1982). Задачи трудные, большинство из них гораздо труднее упражнений из школьных учебников и абитуриентских пособий. Многие задачи предлагались на олимпиадах различного уровня. Почти ко всем задачам даются краткие указания или ответы.

Для увлеченных математикой старшеклассников, преподавателей школ, лицеев и гимназий, руководителей математических кружков и факультативов, а также для всех любителей решать трудные задачи.

ББК 22.1

ISBN 5-85843-057-0

© Бюро Квантум, 2005

## СОДЕРЖАНИЕ

---

Предисловие ... ..	4
Условия задач ... ..	5
1970 год .....	5
1971 год .....	15
1972 год .....	26
1973 год .....	38
1974 год .....	49
1975 год .....	59
1976 год .....	70
1977 год .....	82
1978 год .....	94
1979 год .....	106
1980 год .....	115
1981 год .....	127
1982 год .....	138
Указания и ответы к задачам .....	150

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

В этой книге представлен один из важнейших разделов журнала «Квант» – «Задачник «Кванта». Он возник в первом номере 1970 года и сохранился практически в неизменном виде до сегодняшнего дня. В каждом номере журнала публикуются новые задачи, решения которых предлагается прислать читателям, а затем через некоторое время в журнале приводятся решения этих задач. Организовал раздел (его математическую часть) и руководил им в течение почти 30 лет (до последних дней своей жизни) Николай Борисович Васильев, замечательный математик, внесший неоценимый вклад в дело математического просвещения.

Надо сказать, что задачи «Задачника «Кванта», за редким исключением, трудные. Многие из них рассчитаны на длительную работу, но есть и такие, которые предлагалось решить за ограниченное время на различных конкурсах и олимпиадах (городские олимпиады Москвы и Санкт-Петербурга, Всероссийские, Всесоюзные и Международные олимпиады). Большая часть задач – оригинальные, некоторые из них содержат темы для небольших научно-исследовательских работ по элементарной, а в отдельных случаях и не совсем элементарной, математике. Среди авторов задач были и замечательные математики, входившие в состав редколлегии «Кванта» и активно сотрудничавшие с журналом, и школьники, некоторые из которых впоследствии стали специалистами с мировой известностью.

В этой книге собраны задачи по математике из «Задачника «Кванта» за первые 13 лет его существования. Немногие очень трудные задачи отмечены звездочкой \*; задачи, для решения которых необходимы знания, не входящие в школьный курс (даже математических классов), отмечены значком <sup>+</sup>. К большинству задач даются указания и ответы (авторы – Н.Б.Васильев и Ю.П.Лысов). В скобках после номера задачи указано, где опубликовано ее решение: например, скобка (8–77) означает 8-й номер журнала за 1977 год. Указания очень краткие и рассчитаны скорее на то, чтобы направить размышления знатоков, чем на обучение начинающих.

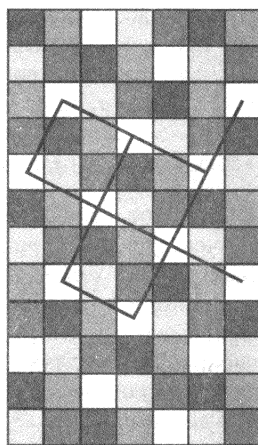
Надеемся, что книга доставит немало приятных минут любителям решать трудные задачи. Желаем успеха!

## 1970 ГОД

1. В стране Анчурии, где правит президент Мирафлорес, приблизилось время новых президентских выборов. В стране ровно 20 миллионов избирателей, из которых только один процент (регулярная армия Анчурии) поддерживает Мирафлореса. Мирафлорес, естественно, хочет быть избранным, но, с другой стороны, он хочет, чтобы выборы казались демократическими. «Демократическим голосованием» Мирафлорес называет вот что: все избиратели разбиваются на несколько равных групп, затем каждая из этих групп вновь разбивается на некоторое количество равных групп, затем эти последние группы снова разбиваются на равные группы и так далее; в самых мелких группах выбирают представителя группы — выборщика, затем выборщики выбирают представителей для голосования в еще большей группе и так далее; наконец, представители самых больших групп выбирают президента. Мирафлорес делит избирателей на группы, как он хочет, и инструктирует своих сторонников, как им голосовать. Сможет ли он так организовать «демократические выборы», чтобы его избрали президентом? (При равенстве голосов побеждает оппозиция.)

2. Дана сфера радиусом 1. На ней расположены равные окружности  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  радиусами  $r$  ( $n \geq 3$ ). Окружность  $\gamma_0$  касается всех окружностей  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ; кроме того, касаются друг друга окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ;  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$ ; ...;  $\gamma_n$  и  $\gamma_1$ . При каких  $n$  это возможно? Вычислите соответствующий радиус  $r$ .

3. а) На рисунке 1 плоскость покрыва квадратами пяти цветов. Центры квадратов одного и того же цвета расположены в вершинах квадратной сетки. При каком числе цветов возможно аналогичное заполнение плоскости?



б) На рисунке 2 плоскость покрыва Рис. 1

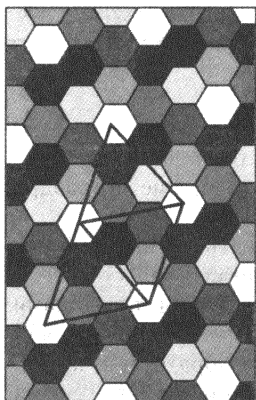


Рис. 2

шестиугольниками семи цветов так, что центры шестиугольников одного и того же цвета образуют вершины решетки из одинаковых правильных треугольников. При каком числе цветов возможно аналогичное построение?

*Примечание.* В первой задаче число цветов может равняться единице (все квадраты одного цвета) и двум (как на шахматной доске). Во второй задаче вы без труда найдете решения с одним цветом и с тремя цветами. Желательно дать полное решение задач, т.е. описать все раскраски, удовлетворяющие указанным условиям. Подумайте, например, существует ли во второй задаче решение с тринадцатью цветами.

4. Дан отрезок  $AB$ . Найдите на плоскости множество точек  $C$  таких, что в треугольнике  $ABC$  медиана, проведенная из вершины  $A$ , равна высоте, проведенной из вершины  $B$ .

5\*. В множестве  $E$ , состоящем из  $n$  элементов, выделены  $m$  различных подмножеств (отличных от самого  $E$ ) так, что для каждых двух элементов из  $E$  найдется ровно одно из данных подмножеств, в которое входят оба эти элемента. Докажите, что  $m \geq n$ . В каких случаях возможно равенство?

6. Перед вами часы. Сколько существует положений стрелок, по которым нельзя определить время, если не знать, какая стрелка часовая, а какая — минутная? (Считается, что положение каждой из стрелок можно определить точно, но следить за тем, как стрелки двигаются, нельзя.)

7. Пусть  $a, b, c$  — стороны треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

8. Двое играют в такую игру. Из кучки, где имеется 25 спичек, каждый берет себе по очереди одну, две или три спички. Выигрывает тот, у кого в конце игры — после того, как все спички будут разобраны, — окажется четное число спичек. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер? Как должен играть начинающий, чтобы выиграть? Как изменится ответ, если считать, что выигрывает забравший нечетное число спичек?

Исследуйте эту игру в общем случае, когда спичек  $2n+1$  и разрешается брать любое число спичек от 1 до  $m$ .

**9.** Рассмотрим следующие свойства тетраэдра (тетраэдром мы называем произвольную треугольную пирамиду):

- а) все грани равновелики;
- б) каждое ребро равно противоположному;
- в) все грани равны;
- г) центры описанной и вписанной сфер совпадают;
- д) суммы плоских углов при каждой вершине тетраэдра равны.

Докажите, что все эти свойства эквивалентны. Постарайтесь найти другие эквивалентные им свойства тетраэдра.

**10.** Четыре круга, центры которых являются вершинами выпуклого четырехугольника, целиком покрывают этот четырехугольник. Докажите, что из них можно выбрать три круга, которые покрывают треугольник с вершинами в центрах этих кругов.

**11.** На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидят 44 веселых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против; см. рис.3). Докажите, что чижи никогда не соберутся на одном дереве.

А если чижей и деревьев  $n$ ?

**12.** Какие четырехугольники можно разрезать прямой линией на два подобных между собой четырехугольника?



Рис. 3

**13.** Докажите, что если разность между наибольшим и наименьшим из  $n$  вещественных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  равна  $d$ , а сумма модулей всех  $\frac{n(n-1)}{2}$  попарных разностей этих чисел

$$\sum_{i < j} |a_i - a_j| \text{ равна } s, \text{ то } (n-1)d \leq s \leq \frac{n^2}{4} d.$$

**14.** У выпуклого белого многогранника некоторые грани покрашены черной краской так, что никакие две черные грани не имеют общего ребра (рис.4). Докажите, что если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- а) черных граней больше половины,



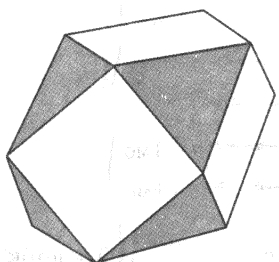


Рис. 4

б) площадь черных граней составляет больше половины площади поверхности многогранника,

то в этот многогранник нельзя вписать шар.

**15.** Квадратная таблица  $n \times n$  заполнена неотрицательными числами так, что и сумма чисел в каждой строке и сумма чисел в каждом столбце равна 1. Докажите, что из таблицы можно выбрать  $n$  положительных чисел, ника-

кие два из которых не стоят ни в одном столбце, ни в одной строке.

**16.** Докажите, что многочлен  $p(x)$  с целыми коэффициентами, который при трех различных целых значениях  $x$  принимает значение 1, не может иметь ни одного целого корня.

**17.** Крестьянин, подходя к развилке двух дорог, расходящихся под углом  $60^\circ$ , спросил: «Как пройти в село  $NN$ ?» Ему ответили: «Иди по левой дороге до деревни  $N$  — это в восьми верстах отсюда, — там увидишь, что направо под прямым углом отходит большая ровная дорога — это как раз дорога в  $NN$ . А можешь идти другим путем: сейчас по правой дороге; как выйдешь к железной дороге — значит, половину пути прошел; тут поверни налево и иди прямо по шпалам до самого  $NN$ ». — «Ну, а какой путь короче-то будет?» — «Да все равно, что так, что этак, никакой разницы».

И пошел крестьянин по правой дороге. Сколько верст ему придется идти до  $NN$ ? Больше десяти или меньше? А если идти от развилки до  $NN$  напрямик? (Все дороги считаются прямыми.)

**18.** а) Докажите, что для любой точки  $M$  окружности, описанной около правильного треугольника  $ABC$ , один из трех отрезков  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  равен сумме двух других.

б) Три равные окружности  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$  попарно касаются друг друга, и вокруг них описана окружность  $\gamma$ , которая касается всех трех:  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma_3$ . Докажите, что для любой точки  $M$  окружности  $\gamma$  касательная, проведенная из точки  $M$  к одной из трех окружностей  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ , равна сумме касательных, проведенных из точки  $M$  к двум другим окружностям.

**19.** В бесконечной цепочке нервных клеток каждая клетка может находиться в одном из двух состояний: «покой» и «возбуждение». Если в данный момент клетка возбудилась, то она посылает сигнал, который через единицу времени, скажем через

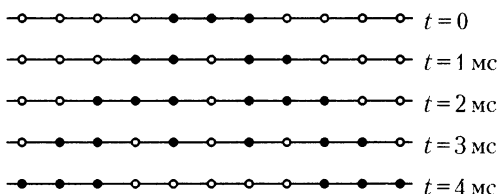


Рис. 5

одну миллисекунду, доходит до обеих соседних с ней клеток. Каждая клетка возбуждается в том и только в том случае, если к ней приходит сигнал от одной из соседних клеток; если сигналы приходят одновременно с двух сторон, то они погашаются, и клетка не возбуждается. Например, если в начальный момент времени  $t = 0$  возбудить три соседние клетки, а остальные оставить в покое, то возбуждение будет распространяться так, как показано на рисунке 5 (возбужденные клетки – черные).

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  возбуждена только одна клетка. Сколько клеток будет находиться в возбужденном состоянии через 15 мс; через 65 мс; через 1000 мс; вообще, через  $t$  мс?

Что будет в том случае, если цепочка не бесконечная, а содержит всего  $N$  клеток, соединенных в окружность (рис.6), – будет ли возбуждение поддерживаться бесконечно долго или затухнет?

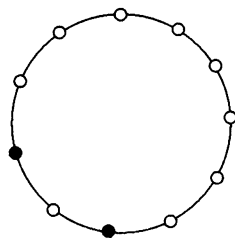


Рис. 6

**20.** Можно ли разбить правильный треугольник на миллион выпуклых многоугольников так, чтобы любая прямая пересекала не более сорока из этих многоугольников? (Мы говорим, что прямая пересекает многоугольник, если она имеет с ним хотя бы одну общую точку.)

**21.** Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдется прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.

**22. а)** В угол вписаны две окружности; у них есть общая внутренняя касательная  $T_1T_2$  ( $T_1$  и  $T_2$  – точки касания), которая пересекает стороны угла в точках  $A_1$  и  $A_2$ . Докажите, что  $A_1T_1 = A_2T_2$  (или, что эквивалентно,  $A_1T_2 = A_2T_1$ ).

**б)** В угол вписаны две окружности; одна из них касается сторон угла в точках  $K_1$  и  $K_2$ , другая – в точках  $L_1$  и  $L_2$ . Докажите, что прямая  $K_1L_2$  отсекает на этих двух окружностях равные хорды.

**23.** Докажите, что при всех натуральных  $n > 1$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sqrt{2n}} < \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots 2n} < \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

**24.** Докажите, что любую дробь  $\frac{m}{n}$ , где  $0 < \frac{m}{n} < 1$ , можно представить в виде

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots + \frac{1}{q_r},$$

где  $0 < q_1 < q_2 < \dots < q_r$  — целые числа и каждое  $q_k$  ( $k = 2, 3, \dots, r$ ) делится на  $q_{k-1}$

**25.** В множестве, состоящем из  $n$  элементов, выбрано  $2^{n-1}$  подмножеств, каждые три из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

**26.** Предположим, что в каждом номере нашего журнала в Задачнике «Кванта» будет пять задач по математике. Обозначим через  $f(x, y)$  номер первой из задач  $x$ -го номера журнала за  $y$ -й год (например,  $f(6, 1970) = 26$ ). Напишите общую формулу для  $f(x, y)$  для всех  $x, y$  ( $1 \leq x \leq 12, y \geq 1970$ ). Решите уравнение  $f(x, y) = y$ .

**27.** Докажите, что если  $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$ , то

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

**28\*.** а) Из 19 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Докажите, что за 8 проверок можно выделить оба радиоактивных шара.

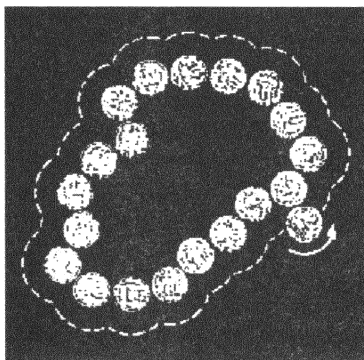


Рис. 7

б) Из 11 шаров 2 радиоактивны. Докажите, что менее чем за 7 проверок нельзя гарантировать выделение обоих радиоактивных шаров.

**29.** Пусть  $n$  одинаковых монет лежат на столе, образуя замкнутую цепочку (рис.7),



центры монет образуют выпуклый многоугольник. Сколько оборотов сделает монета  $M$  такого же размера за то время, пока она один раз обкатится по внешней стороне всей цепочки, как показано на рисунке?

Как изменится ответ, если монета  $M$  будет иметь радиус, отличающийся в  $k$  раз от радиуса каждой из монет в цепочке?

**30.** Докажите, что  $N$  точек на плоскости всегда можно покрыть несколькими непересекающимися кругами, сумма диаметров которых меньше  $N$  и расстояние между любыми двумя из которых больше 1. (Под расстоянием между двумя кругами понимается расстояние между их ближайшими точками.)

**31.** Квадратный лист бумаги разрезают по прямой на две части. Одну из полученных частей снова разрезают на две части, и так делают много раз. Какое наименьшее число разрезов нужно сделать, чтобы среди полученных частей оказалось ровно сто двадцатиугольников?

**32.** Во всех клетках таблицы  $100 \times 100$  стоят плюсы. Разрешается одновременно изменить знаки во всех клетках одной строки или одного столбца. Можно ли, проделав такие операции несколько раз, получить таблицу, где ровно 1970 минусов?

**33\*.** Имеется натуральное число  $n > 1000$ . Возьмем остатки от деления числа  $2^n$  на числа 1, 2, 3, ...,  $n$  и найдем сумму всех остатков. Докажите, что эта сумма больше  $2n$ .

**34.** Докажите, что если натуральное число делится на 10101010101, то в его десятичной записи по крайней мере шесть цифр отличны от нуля.

**35\*.** Около сферы радиусом 10 описан некоторый 19-гранник. Докажите, что на его поверхности найдутся две точки, расстояние между которыми больше 21

**36.** Докажите, что на плоскости нельзя расположить семь прямых и семь точек так, чтобы через каждую из точек проходили три прямые и на каждой прямой лежали три точки.

**37\*.** В каждую клетку бесконечного листа клетчатой бумаги вписано некоторое число так, что сумма чисел в любом квадрате (стороны которого идут по линиям сетки) по модулю не превосходит единицы. Докажите, что тогда существует такое число  $c$ , что сумма чисел в любом прямоугольнике (стороны которого идут по линиям сетки) не больше  $c$ . Докажите, что это верно для  $c = 4$ . Может быть, вам удастся улучшить эту оценку (например, доказать, что наше утверждение верно для  $c = 3$ )? Постройте пример, показывающий, что при  $c < 3$  это утверждение неверно.

**38.** Окружность, построенная на высоте  $AD$  прямоугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре, пересекает катет  $AB$  в точке

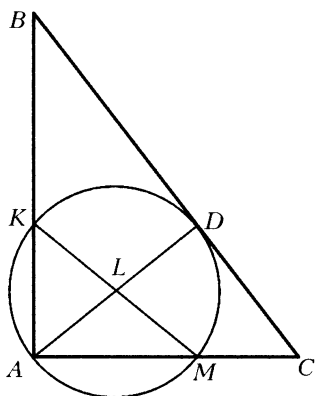


Рис. 8

$K$ , а катет  $AC$  — в точке  $M$  (рис.8). Отрезок  $KM$  пересекает высоту  $AD$  в точке  $L$ . Известно, что отрезки  $AK$ ,  $AL$  и  $AM$  составляют геометрическую прогрессию (т.е.  $\frac{AK}{AL} = \frac{AL}{AM}$ ). Найдите острые углы треугольника  $ABC$ .

**39<sup>+</sup>**. Докажите, что целые неотрицательные числа  $x$ ,  $y$  удовлетворяют уравнению  $x^2 - mxy + y^2 = 1$  (где  $m$  — данное целое число, большее единицы) тогда и только тогда, когда  $x$  и  $y$  — соседние члены последовательности  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_1 = 1$ ,  $\varphi_2 = m$ ,  $\varphi_3 = m^2 - 1$ ,  $\varphi_4 = m^3 - 2m$ ,  $\varphi_5 = m^4 - 3m^2 + 1$ , ..., в которой  $\varphi_{k+1} = m\varphi_k - \varphi_{k-1}$  для всех  $k \geq 1$ .

Например, все решения уравнения  $x^2 - 3xy + y^2 = 1$  в целых числах  $0 \leq x < y$  — это пары  $(0,1)$ ;  $(1,3)$ ;  $(3,8)$ ;  $(8,21)$ ; ... соседних членов последовательности  $0, 1, 3, 8, 21, 55, \dots$ , определяемой условиями  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_1 = 1$ , ...,  $\varphi_{k+1} = 3\varphi_k - \varphi_{k-1}$  для всех  $k \geq 1$ .

**40.** а) Найдите сумму

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \dots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1.$$

б) Попробуйте решить следующую, более общую, задачу: найдите сумму

$$\begin{aligned} S_{n,k} = & (1 \cdot 2 \dots k) \cdot (n(n-1) \dots (n-k+1)) + \\ & + (2 \cdot 3 \dots (k+1)) \cdot ((n-1)(n-2) \dots (n-k)) + \\ & + (3 \cdot 4 \dots (k+2)) \cdot ((n-2)(n-1) \dots (n-k-1)) + \dots \\ & + ((n-k)(n-k+1) \dots (n-1)) \cdot ((k+1)k \dots 2) + \\ & + ((n-k+1)(n-k+2) \dots n) \cdot (k(k-1) \dots 1). \end{aligned}$$

**41.** Дана окружность, ее диаметр  $AB$  и точка  $C$  на этом диаметре. Постройте на окружности две точки  $X$  и  $Y$ , симметричные относительно диаметра  $AB$ , для которых прямая  $YC$  перпендикулярна к прямой  $XA$ .

**42.** Цифры некоторого семнадцатизначного числа записываются в обратном порядке. Полученное число складывается с

первоначальным. Докажите, что хотя бы одна из цифр их суммы будет четной.

**43.** Каждая сторона правильного треугольника разбита на  $n$  равных частей. Через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. В результате треугольник разбился на  $n^2$  маленьких треугольничков (рис.9).

Назовем «цепочкой» последовательность треугольничков, в ко-

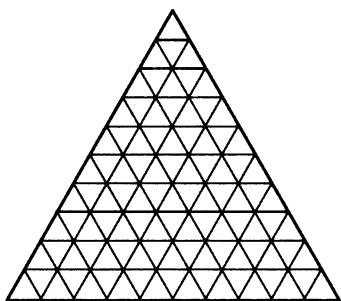


Рис. 9

горой ни один не появляется дважды и каждый последующий имеет общую сторону с предыдущим. Каково наибольшее возможное число треугольничков в цепочке?

**44.** Докажите, что для каждого натурального числа  $K$  существует бесконечно много натуральных чисел  $T$ , не содержащих в десятичной записи нулей и таких, что  $T$  и  $KT$  имеют одинаковые суммы цифр.

**45\*.** Докажите, что из любых двухсот целых чисел можно выбрать сто чисел, сумма которых делится на 100.

Попробуйте обобщить эту задачу: докажите, что из любых  $2n - 1$  целых чисел можно выбрать  $n$ , сумма которых делится на  $n$ , где  $n \geq 2$ .

**46.** Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных наибольшей диагонали?

**47.** Из цифр 1 и 2 составили пять  $n$ -значных чисел так, что у каждых двух чисел совпали цифры ровно в  $m$  разрядах, но ни в одном разряде не совпали все пять чисел. Докажите, что  $\frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}$ .

**48.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  биссектриса  $AD$ , медиана  $BM$  и высота  $CH$  пересекаются в одной точке. Докажите, что угол  $BAC$  больше  $45^\circ$ .

**49.** На карточках написаны все числа от 11111 до 99999 включительно. Эти карточки положены в одну цепочку в произвольном порядке. Докажите, что получившееся 444445-значное число не может быть степенью двойки.

**50\*.** Вершины правильного  $n$ -угольника покрашены несколькими красками (каждая — одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.



**51.** Докажите, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел строго больше суммы их обратных величин, то ровно одно из этих чисел больше 1.

**52.** Пять отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

**53.** В треугольнике  $ABC$  через середину  $M$  стороны  $BC$  и центр  $O$  вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая  $MO$ , которая пересекает высоту  $AN$  в точке  $E$ . Докажите, что отрезок  $AE$  равен радиусу вписанной окружности.

**54.** Два равных между собой прямоугольника расположены так, что их контуры пересекаются в восьми точках. Докажите, что площадь общей части этих прямоугольников больше половины площади каждого из них.

**55.** Все натуральные числа, в десятичной записи которых не больше  $n$  цифр, разбиты на две группы. В первую группу входят все числа с нечетной суммой цифр, во вторую — с четной суммой цифр. Докажите, что если  $1 \leq k < n$ , то сумма  $k$ -х степеней всех чисел первой группы равна сумме  $k$ -х степеней всех чисел второй группы.

**56.** На окружности выписаны в произвольном порядке четыре единицы и пять нулей. Затем в промежутке между двумя одинаковыми числами пишется ноль, между разными цифрами — единица, а первоначальные цифры стираются. Докажите, что сколько бы раз мы ни повторяли этот процесс, мы никогда не получим набора из девяти нулей.

**57.** а) Найдите число  $k$ , которое делится на 2 и на 9 и имеет всего 14 делителей (включая 1 и  $k$ ).

б) Докажите, что если заменить 14 на 15, то задача будет иметь несколько решений, а при замене 14 на 17 решений вообще не будет.

**58.** На плоскости даны три прямые, пересекающиеся в одной точке. На одной из них отмечена точка. Известно, что прямые являются биссектрисами некоторого треугольника, а отмеченная точка — одна из его вершин. Постройте этот треугольник.

**59.** Имеется несколько гирь с массами 1 г, 2 г, 3 г, ...,  $n$  г. Их надо разложить на три равные по массе кучки. При каких  $n$  это удастся сделать?

**60.** Рассмотрим все натуральные числа, в десятичной записи которых участвуют лишь цифры 1 и 0. Разбейте эти числа на две группы так, чтобы сумма любых двух различных чисел из одной и той же группы содержала в своей десятичной записи не менее двух единиц.

## 1971 ГОД

**61.** Два мудреца играют в новую игру, состоящую в следующем. Выписаны числа  $0, 1, 2, \dots, 1024$ . Первый мудрец вычеркивает по своему выбору 512 чисел, второй вычеркивает 256 из оставшихся чисел, затем снова первый вычеркивает еще 128, потом второй — еще 64 числа и так далее. Своим последним пятым ходом второй вычеркивает одно число. Остаются два числа, и второй платит первому разницу между этими числами. Как надо играть первому игроку, чтобы получить как можно больше? Как надо играть второму, чтобы проиграть как можно меньше? Сколько уплатит второй первому, если оба будут играть наилучшим образом?

**62.** Докажите, что для любого нечетного числа  $a$  найдется такое натуральное  $b$ , что  $2^b - 1$  делится на  $a$ .

**63.** Можно ли из 18 плиток размером  $1 \times 2$  выложить квадрат так, чтобы при этом не было ни одного прямого «шва», соединяющего противоположные стороны квадрата и идущего по краям плиток?

(Например, такое расположение плиток, как на рисунке 10, не годится, так как здесь есть «шов»  $AB$ .)

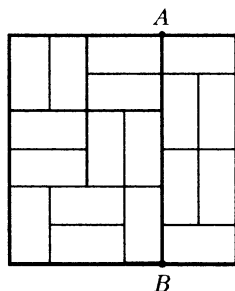


Рис. 10

**64.** На плоскости даны прямая  $l$  и две точки  $P$  и  $Q$ , лежащие по одну сторону от нее. Найдите на прямой  $l$  такую точку  $M$ , для которой расстояние между основаниями высот треугольника  $PQM$ , опущенных на стороны  $PM$  и  $QM$ , наименьшее.

**65.** а) Пусть  $E, F, G$  — такие точки на сторонах  $AB, BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$ , для которых

$$\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{CG}{GA} = k, \text{ где } 0 < k < 1.$$

Найдите отношение площади треугольника, образованного прямыми  $AF, BG$  и  $CE$ , к площади треугольника  $ABC$  (рис. 11).

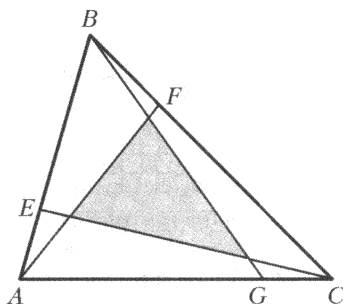


Рис. 11

б) Разрежьте треугольник шестью прямыми на такие части, из которых можно сложить семь равных треугольников.

**66.** Вот несколько примеров, когда сумма квадратов  $k$  последовательных натуральных чисел равна сумме квадратов  $k - 1$

следующих натуральных чисел:

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2,$$

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2.$$

Найдите общую формулу, охватывающую все такие случаи.

**67.** Ювелиру заказано золотое колечко шириной  $h$ , имеющее форму тела, ограниченного поверхностью шара и поверхностью

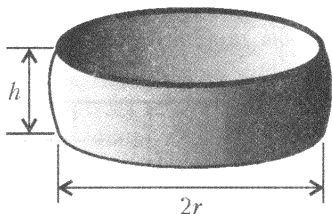


Рис.12

цилиндра радиусом  $r$ , ось которого проходит через центр шара (рис. 12). Мастер сделал такое колечко, но выбрал  $r$  слишком маленьким. Сколько золота ему придется добавить, если  $r$  нужно увеличить в  $k$  раз, а ширину  $h$  оставить прежней?

**68.** Сетка линий, изображенная на рисунке 13, состоит из концентрических окружностей с радиусами  $1, 2, 3, 4, \dots$  и центром в точке  $O$ , прямой  $l$ , проходящей через точку  $O$ , и всевозможных касательных к окружностям, параллельных  $l$ .

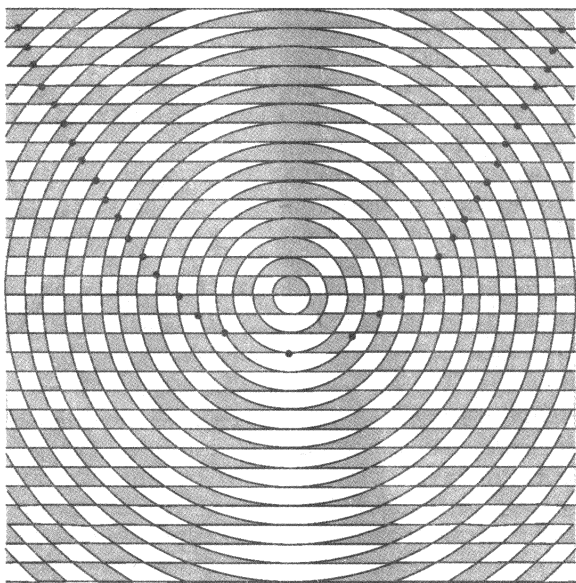


Рис.13



Вся плоскость разбита этими линиями на клетки, которые раскрашены в шахматном порядке. В цепочке точек, показанных на рисунке, каждые две соседние точки являются противоположными вершинами черной клетки. Докажите, что все точки такой бесконечной цепочки лежат на одной параболе (потому весь рисунок как бы соткан из светлых и темных парабол).

**69.** Число 76 обладает таким странным свойством: последние две цифры числа  $76^2 = 5776$  дают снова 76.

а) Есть ли еще такие двузначные числа?

б) Найдите все трехзначные числа  $A$  такие, у которых последние три цифры числа  $A^2$  составляют число  $A$ .

в) Существует ли бесконечная последовательность цифр  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$  такая, что для любого  $n$  квадрат числа « $a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1$ » имеет вид « $\dots a_n a_{n-1} \dots a_3 a_2 a_1$ »? Кавычками здесь обозначена десятичная запись числа. Очевидный ответ  $a_1 = 1$ ,  $a_i = 0$  при  $i > 1$  мы исключаем.

**70.** Пусть  $l_1, l_2, \dots, l_n$  — несколько прямых на плоскости, среди которых есть две пересекающиеся. Докажите, что можно и притом единственным способом выбрать на каждой из этих прямых по точке  $X_1, X_2, \dots, X_n$  так, чтобы перпендикуляр, восстановленный в точке  $X_i$  к прямой  $l_i$ , проходил через точку  $X_{i+1}$  (для всех  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) и перпендикуляр, восстановленный к  $l_n$  в точке  $X_n$ , проходил через точку  $X_1$ . (На рисунке 14 изображен пример для  $n = 4$ .)

Попробуйте сформулировать и доказать аналогичную теорему в пространстве.

**71.** Прямоугольная таблица из  $m$  строк и  $n$  столбцов заполнена числами. Переставим числа в каждой строке в порядке возрастания. Докажите, что если после этого переставить числа в каждом столбце в порядке возрастания, то в каждой строке они по-прежнему будут стоять в порядке возрастания.

Подумайте, что будет, если действовать в другом порядке: в первоначальной таблице сначала переставить числа по возрастанию в столбцах, а потом — в строках. Получится ли в результате та же самая таблица, что и в первом случае, или другая?

**72.** Решите уравнение

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = p$$

где  $p$  — произвольное вещественное число.

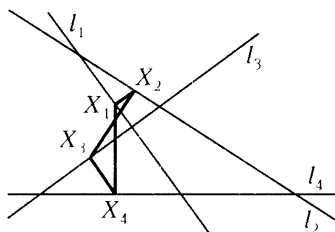


Рис. 14

**73.** На лотерейном билете требуется отметить 8 клеточек из 64. Какова вероятность того, что после розыгрыша, в котором также будет выбрано 8 каких-то клеток из 64 (причем все такие возможности мы считаем равновероятными), окажется, что угаданы ровно 4 клетки; 5 клеток; ... все 8 клеток?

**74.** Многочлен  $p$  обладает таким свойством: для некоторого числа  $a$  выполняется  $x(p) = p(a - x)$ . Докажите, что  $p(x)$  можно представить в виде многочлена от  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$ . Например, если  $p(x) = x^5 + (1 - x)^5$ , то, очевидно,  $p(x) = p(1 - x)$  и, как нетрудно проверить,  $p(x) = 5y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{1}{16}$ , где  $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ .

**75. а)** Докажите, что в любом выпуклом многограннике сумма длин всех ребер больше утроенного диаметра. (Диаметром многогранника называется наибольшая из длин всевозможных отрезков с концами в вершинах многогранника.)

**б)** Докажите, что для любых двух вершин  $A$  и  $B$  выпуклого многогранника найдутся три ломаные, каждая из которых идет по ребрам многогранника из  $A$  в  $B$  и никакие две не проходят по одному ребру.

**в)** Докажите, что если в выпуклом многограннике разрезать два ребра, то для любых двух его вершин  $A$  и  $B$  найдется ломаная, идущая из  $A$  в  $B$  по оставшимся ребрам.

**г)** Докажите, что в задаче б) можно выбрать три ломаные, попарно не имеющие общих вершин, за исключением концов  $A$  и  $B$ .

**76.** В компании из  $n$  человек каждые двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые двое знакомых не имеют больше общих знакомых. Докажите, что в этой компании каждый знаком с одинаковым числом людей.

**77.** Длины двух сторон треугольника равны 10 и 15. Докажите, что биссектриса угла между ними не больше 12.

**78.** Докажите, что каждое целое неотрицательное число можно представить в виде  $\frac{(x + y)^2 + 3x + y}{2}$ , где  $x$  и  $y$  — целые неотрицательные числа, и что такое представление единственно.

**79.** Две точки  $P$  и  $Q$  движутся по двум пересекающимся прямым с одной и той же постоянной скоростью  $v$ . Докажите, что на плоскости существует такая неподвижная точка  $A$ , расстояния от которой до точек  $P$  и  $Q$  в любой момент времени равны.

**80.** В таблице  $m \times n$  расставлены произвольные числа. Разрешается одновременно изменить знак у всех чисел какого-то

одного столбца или у всех чисел какой-то одной строки. Докажите, что, повторив такую операцию несколько раз, можно получить таблицу, у которой сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке будут неотрицательны.

**81.** Внутри квадрата  $A_1A_2A_3A_4$  взята произвольная точка  $P$ . Из вершины  $A_1$  опущен перпендикуляр на прямую  $A_2P$ , из вершины  $A_2$  — на  $A_3P$ , из  $A_3$  — на  $A_4P$ , из  $A_4$  — на  $A_1P$ . Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

**82.** На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Известно, что если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы одна из машин, стоящих на дороге, может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

**83\*.** Докажите, что числа  $1, 2, \dots, n$  ни при каком  $n$  нельзя разбить на две группы так, чтобы произведение чисел в одной группе равнялось произведению чисел в другой.

**84\*.** Пусть  $A$  — основание перпендикуляра, опущенного из центра данной окружности на данную прямую  $l$ . На этой прямой взяты еще две точки  $B$  и  $C$  так, что  $AB = AC$ . Через точки  $B$  и  $C$  проведены соответственно две произвольные секущие, из которых одна пересекает окружность в точках  $P$  и  $Q$ , вторая — в точках  $M$  и  $N$ . Пусть прямые  $PM$  и  $QN$  пересекают прямую  $l$  в точках  $R$  и  $S$ . Докажите, что  $AR = AS$ .

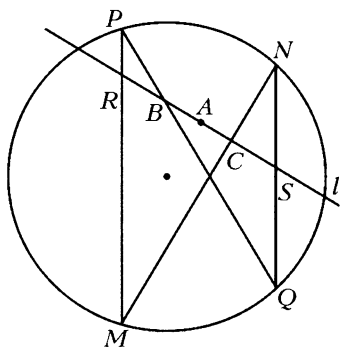


Рис. 15

*Примечание.* Эту задачу (или некоторые ее варианты) называют иногда «задачей о бабочке»; происхождение такого названия ясно из рисунка 15.

**85\*.** Докажите, что если  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — попарно различные натуральные числа, ни одно из которых не делится на квадрат целого числа, большего единицы, а  $b_1, b_2, \dots, b_m$  — целые числа, отличные от нуля, то

$$b_1\sqrt{a_1} + b_2\sqrt{a_2} + \dots + b_m\sqrt{a_m} \neq 0.$$

**86.** Дно прямоугольной коробки было выложено плитками размерами  $2 \times 2$  и  $1 \times 4$ . Плитки высыпали из коробки и при

этом потеряли одну плитку  $2 \times 2$ . Вместо нее удалось достать плитку  $1 \times 4$ . Докажите, что теперь выложить дно коробки плитками не удастся.

**87.** Докажите, что если три окружности одинаковых радиусов проходят через одну точку, то три другие точки попарного пересечения этих окружностей лежат на окружности с тем же радиусом (рис.16).

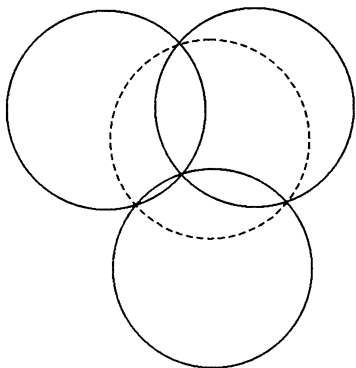


Рис.16

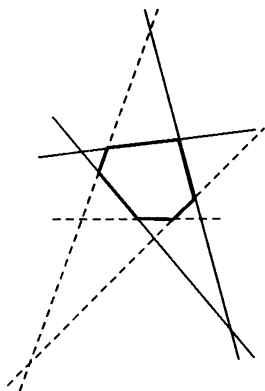


Рис.17

**88.** Какому условию должны удовлетворять коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  уравнения  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , чтобы три его корня составляли арифметическую прогрессию?

**89.** Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике, кроме параллелограмма, можно выбрать такие три стороны, при продолжении которых образуется треугольник, объемлющий данный многоугольник. (Например, на рисунке 17, где многоугольник обведен черной линией, три сплошные прямые удовлетворяют условию, а три пунктирные – нет. )

**90\*.** Докажите, что если  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$  – натуральные числа, то

$$\frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} + \dots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{n^2}.$$

**91.** Двое играют в «крестики» и «нолики» на бесконечном листе клетчатой бумаги. Начинаящий ставит крестик в любую клетку. Каждым следующим своим ходом он должен ставить

крестик в любую свободную клетку, соседнюю с одной из клеток, где уже стоит крестик; соседней с данной клеткой считается любая, имеющая с ней общую сторону или общую вершину. Второй играющий каждым своим ходом может ставить сразу три нолика в любые три свободные клетки (не обязательно рядом друг с другом). На рисунке

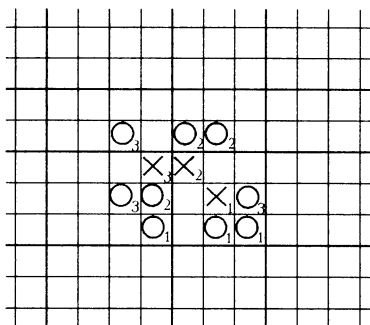


Рис. 18

18 изображена одна из позиций, которые могут возникнуть после третьего хода. Докажите, что, как бы ни играл первый, второй может его «запереть»: добиться того, чтобы первому больше некуда было поставить крестик.

Исследуйте аналогичные игры, в которых второму разрешается за один ход ставить не три, а только два или только один нолик. Каков здесь будет результат при правильной игре партнеров: удастся ли ноликам «запереть» крестики (и какое наибольшее число ходов могут «продержаться» крестики) или игра может продолжаться до бесконечности?

Попробуйте изучить другие варианты этой игры: когда соседними с данной считаются только клетки, имеющие с ней общую сторону; когда плоскость разбита не на квадраты, а на правильные шестиугольники; когда первому разрешается ставить сразу  $p$  крестиков, а второму —  $q$  ноликов.

**92.** Петя собирается все 90 дней каникул провести в деревне и при этом строго придерживаться такого распорядка: каждый второй день (т.е. через день) ходить купаться на озеро, каждый третий — ездить в магазин за продуктами и каждый пятый день решать задачи по математике. (В первый день Петя проделал и то, и другое, и треть и очень устал.) Сколько будет у Пети «приятных» дней, когда можно будет купаться, но не нужно ездить в магазин и решать задачи? Сколько «скучных», когда совсем не будет никаких дел?

**93.** Каждое из чисел  $x_1, \dots, x_n$  равно плюс или минус единице. Известно, что  $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$ . Докажите, что  $n$  делится на четыре.

**94<sup>+</sup>**. Докажите, что не существует многогранника, у которого к каждой вершине и к каждой грани примыкает не менее чем по четыре ребра.



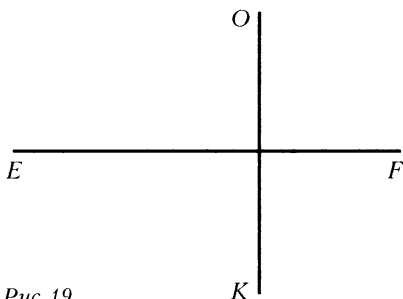


Рис.19

**95.** На доске была начерчена трапеция, в ней была проведена средняя линия  $EF$  и опущен перпендикуляр  $OK$  из точки  $O$  пересечения диагоналей на большее основание. Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам  $EF$  и  $KO$  (рис.19)?

**96.** Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трех из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Докажите, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.

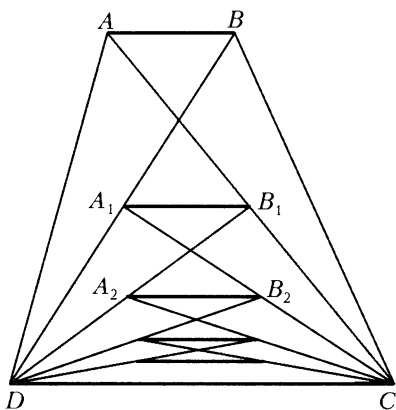


Рис.20

**97.** В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AB = a$  и  $CD = b$  проведен отрезок  $A_1B_1$ , соединяющий середины диагоналей. В полученной трапеции  $A_1B_1CD$  снова проведен отрезок  $A_2B_2$ , соединяющий середины диагоналей, и так далее (рис. 20). Может ли в последовательности длин

отрезков  $AB, A_1B_1, A_2B_2, \dots$  какое-то число встретиться дважды? Будет ли эта последовательность монотонной (возрастающей или убывающей)? Стремится ли она к какому-нибудь пределу?

**98.** Докажите, что в таблице

1
1 1 1
1 2 3 2 1
1 3 6 7 6 3 1
.....

где каждое число равно сумме трех стоящих над ним чисел предыдущей строки, в каждой строке (начиная с третьей) есть четное число. В каждой ли строке (кроме первых двух) встречается число, делящееся на три?

**99.** В треугольнике  $ABC$  сторона  $AC$  — наибольшая. Докажите, что для любой точки  $M$  плоскости сумма  $AM + CM$  не меньше  $BM$ . В каких случаях возможно равенство?

**100\*.** Докажите, что сумма 45 чисел

$$\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ + \dots + \operatorname{tg} 173^\circ + \operatorname{tg} 177^\circ$$

равна 45.

**101.** В колонию, состоящую из  $n$  бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожают две бактерии, и затем оба вируса и все оставшиеся бактерии снова делятся, и так далее. Будет ли эта колония жить бесконечно долго или в конце концов погибнет?

**102.** Множество на плоскости, состоящее из конечного числа точек, обладает следующим свойством: для любых двух точек  $A$  и  $B$  множества найдется точка  $C$  множества такая, что треугольник  $ABC$  равнобедренный. Сколько точек может содержать такое множество?

**103.** Исследуйте, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = a, \\ x^2 - y^2 = b, \end{cases}$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые действительные числа.

**104.** Внутри треугольника  $ABC$  лежат такие две точки  $P$  и  $Q$ , что отрезки  $AP$  и  $AQ$  составляют равные углы с биссектрисой угла  $A$  треугольника, а отрезки  $BP$  и  $BQ$  составляют равные углы с биссектрисой угла  $B$  (рис.21). Докажите, что отрезки  $CP$  и  $CQ$  составляют равные углы с биссектрисой угла  $C$ .

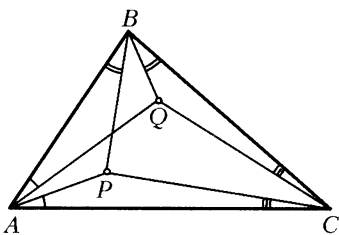


Рис.21

**105.** Сумма цифр числа после его умножения на 8 может уменьшиться:  $75 \cdot 8 = 600$  — сумма цифр была  $7 + 5 = 12$ , а стала 6.

Однако она не может уменьшиться более чем в 8 раз. Докажите это. Другими словами, докажите, что для любого натурального числа  $N$  справедливо неравенство  $\frac{S(8N)}{S(N)} \geq \frac{1}{8}$ , где  $S(A)$  — сумма цифр числа  $A$  (в десятичной записи). Для каких еще

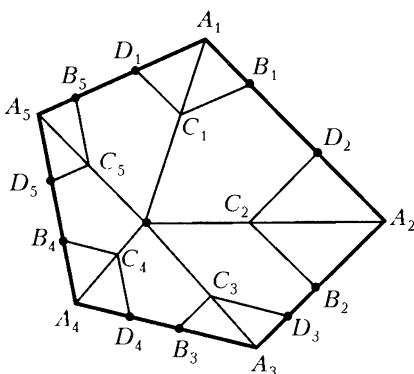
натуральных чисел  $k$  существует такое положительное число  $c_k$ , что  $\frac{S(kN)}{S(N)} \geq c_k$  для всех натуральных  $N$ ? Найдите наибольшее подходящее значение  $c_k$ .

**106.** Докажите, что если для чисел  $p_1, p_2, q_1, q_2$  выполнено неравенство

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1) < 0,$$

то квадратные трехчлены  $x^2 + p_1 x + q_1$  и  $x^2 + p_2 x + q_2$  имеют вещественные корни и между двумя корнями каждого из них лежит корень другого.

**107.** а) Дан выпуклый многоугольник  $A_1 A_2 \dots A_n$ . На стороне  $A_1 A_2$  взяты точки  $B_1$  и  $D_2$ , на стороне  $A_2 A_3$  — точки  $B_2$  и  $D_3$ , ..., на стороне  $A_n A_1$  — точки  $B_n$  и  $D_1$  так, что если построить параллелограммы  $A_1 B_1 C_1 D_1, A_2 B_2 C_2 D_2, \dots, A_n B_n C_n D_n$ , то прямые  $A_1 C_1, A_2 C_2, \dots, A_n C_n$  пересекутся в одной точке (рис. 22). Докажите, что



$A_1 B_1 \cdot A_2 B_2 \cdot \dots \cdot A_n B_n =$   
 $= A_1 D_1 \cdot A_2 D_2 \cdot \dots \cdot A_n D_n.$

б) Докажите, что для треугольника верно и обратное утверждение: пусть на

стороне  $A_1 A_2$  выбраны точки  $B_1$  и  $D_2$ , на стороне  $A_2 A_3$  — точки  $B_2$  и  $D_3$ , на стороне  $A_3 A_1$  — точки  $B_3$  и  $D_1$  так, что  $A_1 B_1 \cdot A_2 B_2 \cdot A_3 B_3 = A_1 D_1 \cdot A_2 D_2 \cdot A_3 D_3$ ; тогда, если построить параллелограммы  $A_1 B_1 C_1 D_1, A_2 B_2 C_2 D_2, A_3 B_3 C_3 D_3$ , то прямые  $A_1 C_1, A_2 C_2, A_3 C_3$  пересекутся в одной точке.

**108.** а) Докажите, что прямая, разбивающая данный треугольник на два многоугольника равной площади и равного периметра, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник.

б) Докажите аналогичное утверждение для произвольного многоугольника, в который можно вписать окружность.

**109.** а) В вершине  $A_1$  правильного 12-угольника  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{12}$  стоит знак «минус», а в остальных вершинах — «плюсы». Разрешается одновременно менять знак на противоположный в любых шести последовательных вершинах многоугольника. Докажите, что за несколько таких операций нельзя добиться

того, чтобы в вершине  $A_2$  оказался знак «минус», а в остальных вершинах — «плюсы».

б) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки не в шести, а в четырех последовательных вершинах многоугольника.

в) Докажите то же утверждение, если разрешается одновременно менять знаки в трех последовательных вершинах многоугольника.

**110\*.** На бесконечном листе клетчатой бумаги  $N$  клеток выкрашены в черный цвет. Докажите, что из листа можно вырезать конечное число квадратов так, что будут выполнены два условия: 1) все черные клетки будут лежать в вырезанных квадратах; 2) в любом вырезанном квадрате  $K$  площадь черных клеток составит не менее  $1/5$  и не более  $4/5$  площади  $K$ .

**111\*.** В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры не превышает 0,34. (Можно считать, что граница фигуры, о которой говорится в условии, состоит из отрезков прямых и дуг окружностей.)

Постарайтесь получить более точную оценку и доказать аналогичную теорему в пространстве.

**112.** В таблице  $m \times n$  записаны числа так, что для любых двух строк и любых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стерли, но по оставшимся можно восстановить стертые. Докажите, что осталось не меньше чем  $(n + m - 1)$  чисел.

**113.** Докажите, что для любого натурального  $n$  найдется число, составленное из цифр 1 и 2, делящееся на  $2^n$ .

**114.** По кругу выписаны несколько чисел. Если для некоторых четырех идущих подряд чисел  $a, b, c, d$  оказывается, что  $(a - b)(b - c) < 0$ , то числа  $b$  и  $c$  можно поменять местами. Докажите, что эту операцию можно проделать лишь конечное число раз.

**115\*.** В три сосуда налито по целому числу литров воды. В любой сосуд разрешается перелить столько воды, сколько в нем уже содержится, из любого другого сосуда. Докажите, что несколькими такими переливаниями можно освободить один из сосудов. (Сосуды достаточно велики: каждый может вместить всю воду.)

**116.** Докажите, что если соединить середины последовательных сторон выпуклого  $n$ -угольника  $M$  (рис 23), то у полученно-

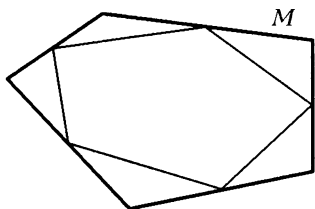


Рис. 23

го многоугольника:

а) периметр не меньше половины периметра  $M$  ( $n \geq 3$ );

б) площадь не меньше половины площади  $M$  ( $n \geq 4$ ).

**117.** Несколько человек в течение  $t$  минут наблюдали за улиткой. Каждый наблюдал за ней ровно 1 минуту и заметил, что за эту минуту

улитка проползла ровно 1 метр. Ни в один момент времени улитка не оставалась без наблюдения. Какой наименьший и какой наибольший путь могла она проползти за эти  $t$  минут?

Попробуйте решить эту задачу сначала для небольших значений  $t$ , например для  $t = 2,5$  минут.

**118.** С четырех сторон шахматной доски размером  $n \times n$  построена кайма шириной в 2 поля. Докажите, что кайму можно обойти шахматным конем, побывав на каждом поле один и только один раз, в том и только в том случае, когда  $n - 1$  кратно 4.

**119.** Докажите, что если на каждой грани выпуклого многогранника выбрать по точке и провести из этой точки вектор, который направлен перпендикулярно соответствующей грани во внешнюю сторону и длина которого равна площади этой грани, то сумма всех таких векторов будет равна нулю.

**120.** В некотором множестве введена операция  $*$ , которая каждым двум элементам  $a$  и  $b$  этого множества ставит в соответствие элемент  $a * b$  из этого множества. Известно, что:

1) для любых трех элементов  $a$ ,  $b$  и  $c$  выполняется равенство  $a * (b * c) = b * (c * a)$ ;

2) если  $a * b = a * c$ , то  $b = c$ .

Докажите, что операция  $*$ :

а) коммутативна, т.е. для любых элементов  $a$  и  $b$  выполняется  $a * b = b * a$ ;

б) ассоциативна, т.е. для любых элементов  $a$ ,  $b$  и  $c$  выполняется  $(a * b) * c = a * (b * c)$ .

## 1972 ГОД

**121.** Докажите, что для любых  $n$  вещественных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  найдется такое натуральное  $k \leq n$ , что каждое из  $k$  чисел  $a_k, \frac{a_{k-1} + a_k}{2}, \frac{a_{k-2} + a_{k-1} + a_k}{3}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$  не превосходит  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ .



**122.** Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность. Известно, что расстояния от точки  $E$  до прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  равны  $p$ ,  $q$ ,  $r$  соответственно. Найдите расстояние от точки  $E$  до прямой  $AD$ .

**123<sup>+</sup>.** Найдите все натуральные числа  $m$ , для которых

$$1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot (2m-1)! = \left( \frac{m(m+1)}{2} \right)!$$

(через  $n!$  обозначается произведение  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ).

**124.** Дан треугольник  $ABC$ . Найдите внутри него точку  $O$ , обладающую следующим свойством: для любой прямой, проходящей через точку  $O$  и пересекающей стороны треугольника  $AB$

в точке  $K$  и  $BC$  в точке  $L$ , выполняется равенство  $\frac{AK}{KB} + \frac{CL}{LB} = 1$ .

Вообще, докажите, что если  $p$  и  $q$  — произвольно заданные положительные числа, то внутри треугольника  $ABC$  можно указать такую точку  $O$ , что для любой прямой  $KL$ , проходящей

через эту точку ( $K$  лежит на  $AB$ ,  $L$  — на  $BC$ ),  $p \frac{AK}{KB} + q \frac{CL}{LB} = 1$ .

**125\*.** а) Существует ли бесконечная последовательность натуральных чисел, обладающая следующим свойством: ни одно из этих чисел не делится на другое, но среди каждых трех чисел можно выбрать два, сумма которых делится на третье?

б) Если нет, то как много чисел может быть в наборе, обладающем таким свойством?

в) Решите ту же задачу при дополнительном условии: в набор разрешается включать только нечетные числа.

Вот один пример такого набора из четырех чисел: 3, 5, 7, 107. Здесь среди трех чисел 3, 5, 7 сумма  $5 + 7$  делится на 3; в тройке 5, 7, 107 сумма  $107 + 5$  делится на 7; в тройке 3, 7, 107 сумма  $7 + 107$  делится на 3; наконец, в тройке 3, 5, 107 сумма  $3 + 107$  делится на 5

**126.** Многоугольник, описанный вокруг окружности радиусом  $r$ , каким-то образом разрезан на треугольники. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше  $r$ .

**127.** Для каждого натурального числа  $n$  обозначим через  $s(n)$  сумму его цифр (в десятичной записи). Назовем натуральное число  $m$  особым, если его нельзя представить в виде  $m = n + s(n)$ , где  $n$  — какое-то натуральное число. (Например, число 117 неособое, поскольку  $117 = 108 + s(108) = 108 + 9$ , а число 121, как нетрудно убедиться, — особое.) Верно ли, что особых чисел существует лишь конечное число?

**128.** Найдите отношение сторон треугольника, одна из медиан которого делится вписанной окружностью на три равные части.

**129.** а) В ведро налили 12 л молока. Как, пользуясь лишь сосудами в 5 и 7 л, разделить молоко на две равные части?

б) Решите общую задачу: при каких  $a$  и  $b$  можно разделить пополам  $(a + b)$  л молока, пользуясь лишь сосудами в  $a$  л,  $b$  л и  $(a + b)$  л?

За одно переливание из одного сосуда в другой можно вылить все, что там есть, или долить второй сосуд до верха.

**130.** Какое наибольшее число точек можно разместить:

а) на плоскости;

б\*) в пространстве

так, чтобы ни один из треугольников с вершинами в этих точках не был тупоугольным?

**131.** Докажите, что четыре точки, в которых биссектрисы углов между продолжениями противоположных сторон вписанного четырехугольника пересекают его стороны, являются вершинами ромба (рис.24).

**132.** Пусть по окружности выписаны  $n$  чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , каждое из которых равно  $(+1)$  или  $(-1)$ , причем сумма  $n$

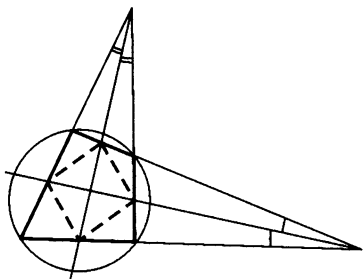


Рис. 24

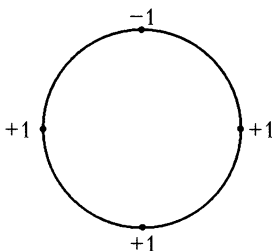


Рис. 25

парных произведений соседних чисел равна 0 (как в задаче 93) и вообще для каждого  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  сумма  $n$  парных произведений чисел, отстоящих друг от друга на  $k$  мест, равна нулю (т.е.  $x_1x_3 + x_2x_4 + \dots = 0$ ,  $x_1x_4 + x_2x_5 + \dots = 0$  и так далее); пример для  $n = 4$  дан на рисунке 25

а) Докажите, что  $n$  — квадрат целого числа.

б) Существует ли такой набор  $n$  чисел при  $n = 16$ ?

(Полное решение вопроса, при каких  $n$  такой набор чисел существует, нам не известно.)

**133.** Один из простейших многоклеточных организмов – водоросль вольвокс – представляет собой сферическую оболочку, сложенную, в основном, семиугольными, шестиугольными и пятиугольными клетками (т.е. клетками, имеющими семь, шесть или пять соседних; в каждой «вершине» сходятся три клетки (рис.26)). Бывают экземпляры, у которых есть и четырехугольные, и восьмиугольные клетки, но биологи заметили, что если таких «нестандартных» клеток (менее чем с пятью и более чем с семью сторонами) нет, то пятиугольных клеток всегда ровно на 12 больше, чем семиугольных (всего клеток может быть несколько сотен и даже тысяч). Не можете ли вы объяснить этот факт?

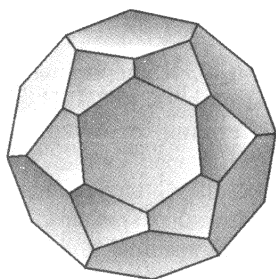


Рис. 26

**134.** Какое множество точек заполняют центры тяжести треугольников, три вершины которых лежат соответственно на трех сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  данного треугольника  $ABC$ ?

**135\*.** Докажите, что для каждого натурального  $n > 1$  верно тождество

$$\sin x \sin \left( x + \frac{\pi}{n} \right) \sin \left( x + \frac{2\pi}{n} \right) \dots \sin \left( x + \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = c_n \sin nx,$$

где  $c_n$  – некоторое число (зависящее от  $n$ ), и найдите  $c_n$ .

**136.** Можно ли увезти из каменоломни 50 камней, массы которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 468 кг (массы составляют арифметическую прогрессию с разностью 2), на семи трехтонках?

**137.** Пусть  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  – длины четырех последовательных сторон четырехугольника,  $S$  – его площадь.

а) Докажите, что  $2S \leq ab + cd$ .

б) Докажите, что  $2S \leq ac + bd$ .

в) Докажите, что если хотя бы в одном из этих неравенств достигается равенство, то четырехугольник можно вписать в окружность.

**138.** Докажите, что если  $m$  и  $n$  – целые числа и  $1 \leq m < n$ , то

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^m C_n^k = 0,$$

где  $C_n^k$  – биномиальные коэффициенты, т.е. коэффициенты

многочлена  $(1+x)^m = \sum_{k=0}^m C_n^k x^k$ .

(Например, если  $n = 4$ , то  $C_4^0 = 1$ ,  $C_4^1 = 4$ ,  $C_4^2 = 6$ ,  $C_4^3 = 4$ ,  $C_4^4 = 1$  и верны равенства

$$-1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 0,$$

$$-1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 6 - 3^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 1 = 0,$$

$$-1^3 \cdot 4 + 2^3 \cdot 6 - 3^3 \cdot 4 + 4^3 \cdot 1 = 0.)$$

**139.** Из вершины  $B$  параллелограмма  $ABCD$  проведены его высоты  $BK$  и  $BH$ . Известны отрезки  $KH = a$  и  $BD = b$ . Найдите расстояние от точки  $B$  до точки пересечения высот треугольника  $BKH$ .

**140.** С натуральным числом (записываемым в десятичной системе) разрешается проделывать следующие операции:

- А) приписать на конце цифру 4;
- Б) приписать на конце цифру 0;
- В) разделить на 2 (если число четно).

Например, если с числом 4 проделать последовательно операции В, В, А и Б, то получится число 140.

а) Как из числа 4 получить число 1972?

б) Докажите, что из числа 4 можно получить любое натуральное число.

**141.** Выберем на высоте  $BH$  треугольника  $ABC$  произвольную точку  $P$  (рис.27). Пусть  $K$  – точка пересечения прямых  $AP$  и  $BC$ ,  $L$  – точка пересечения прямых  $CP$  и  $AB$ . Докажите, что отрезки  $KH$  и  $LH$  составляют равные углы с высотой  $BH$ .

**142.** а) Докажите, что нельзя занумеровать ребра куба числами 1, 2, ..., 12 так, чтобы для каждой вершины сумма номеров трех выходящих из нее ребер была одной и той же.

б) Можно ли вычеркнуть одно из чисел 1, 2, ..., 12, 13 и оставшимися занумеровать ребра куба так, чтобы выполнялось то же условие?

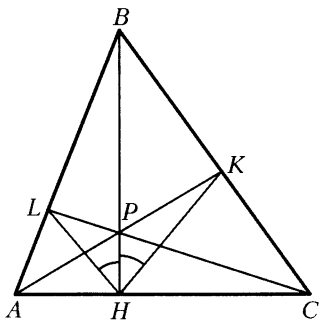


Рис. 27

**143.** Найдите наименьшее натуральное число  $n$ , для которого выполняется следующее условие: если  $n$  делится на  $(p - 1)$  и  $p$  простое, то  $n$  делится на  $p$ .

**144\*.** Найдите необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , чтобы прямоугольник  $a \times b$  можно было разрезать на несколько прямоугольников  $\alpha \times \beta$ .

Например, можно ли прямоугольник  $50 \times 60$  разрезать на прямоугольники размерами: а)  $20 \times 15$ ; б)  $5 \times 8$ ; в)  $6,25 \times 15$ ; г)  $(2 - \sqrt{2}) \times (2 + \sqrt{2})$ ?

**145.**  $A$  обещает платить  $B$  в среднем  $\sqrt{2}$  рублей в день. Они условились, что в  $n$ -й день  $B$  будет получать целое число  $a_n$  рублей ( $a_n$  равно 1 или 2) с таким расчетом, чтобы сумма, полученная за первые  $n$  дней  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ , была как можно ближе к числу  $n\sqrt{2}$ . Например,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 1$ ,  $a_4 = 2$ ,  $a_5 = 1$ . Докажите, что последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  непериодическая.

**146.** а) В вершинах правильного 7-угольника расставлены черные и белые фишки. Докажите, что найдутся 3 фишки одного цвета, лежащие в вершинах равнобедренного треугольника.

б) Верно ли аналогичное утверждение для 8-угольника?

в) Выясните, для каких правильных  $n$ -угольников аналогичное верно, а для каких – нет.

**147.** Докажите, что если четырехугольник  $ABCD$ , вписанный в окружность, таков, что касательные к окружности в точках  $A$  и  $C$  пересекаются на продолжении диагонали  $BD$ , то:

а) касательные в точках  $B$  и  $D$  пересекаются на продолжении диагонали  $AC$ ;

б) биссектрисы внутренних углов  $A$  и  $C$  четырехугольника пересекаются на диагонали  $BD$  (а углов  $B$  и  $D$  – на  $AC$ ).

**148.** Последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots$  определяется следующими условиями:  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = \lambda$ , для любого  $n > 1$  выполнено равенство

$$(\alpha + \beta)^n x_n = \alpha^n x_n x_0 + \alpha^{n-1} \beta x_{n-1} x_1 + \alpha^{n-2} \beta^2 x_{n-2} x_2 + \dots + \beta^n x_0 x_n.$$

Здесь  $\lambda, \alpha, \beta$  – заданные положительные числа. Найдите  $x_n$  и выясните, при каком  $n$  величина  $x_n$  будет наибольшей.

**149.** Пусть  $O$  – точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что:

а) если равны периметры треугольников  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  и  $DAB$ , то  $ABCD$  – прямоугольник;

б) если равны периметры треугольников  $ABO$ ,  $BCO$ ,  $CDO$  и  $DAO$ , то  $ABCD$  – ромб.

**150\*.** Из чисел  $1, 2, \dots, k$  составляются всевозможные наборы  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  длиной  $n$  (легко видеть, что их  $k^n$ ). Выбраны два подмножества  $P$  и  $Q$  таких наборов (один и тот же набор может входить и в  $P$ , и в  $Q$ ). Известно, что если взять произвольный набор  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$  из  $P$  и произвольный набор  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  из  $Q$ , то они будут совпадать хотя бы в одном



месте (т.е.  $p_i = q_i$  для некоторого  $i$ ). Тогда либо в  $P$ , либо в  $Q$  не более чем  $k^{n-1}$  наборов. Докажите это утверждение:

- а) для  $k = 2$  и любого  $n$ ;
- б) для  $n = 1, 2, 3$  и любого  $k \geq 2$ ,
- в) для произвольных  $k \geq 2$  и  $n \geq 1$

Попробуйте найти другие ограничения на количество элементов в подмножествах  $P$  и  $Q$ , связанных таким условием

**151.** Каждая из девяти прямых разбивает квадрат на два четырехугольника, площади которых относятся как 2:3. Докажите, что по крайней мере три из этих девяти прямых проходят через одну точку.

**152.** Пусть  $a, b, m, n$  — натуральные числа, причем  $a$  взаимно просто с  $b$  и  $a > 1$ . Докажите, что если  $a^m + b^m$  делится на  $a^n + b^n$ , то  $m$  делится на  $n$

**153\*.** Двое играют в следующую игру. Один называет цифру, а другой вставляет ее по своему усмотрению вместо одной из звездочек в следующей разности:

$$\begin{array}{r} * * * * \\ - \\ * * * * \end{array}$$

Затем первый называет еще одну цифру и так далее 8 раз, пока все звездочки не заменятся на цифры. Тот, кто называет цифры, стремится к тому, чтобы разность получилась как можно больше, а второй — чтобы она стала как можно меньше. Докажите, что:

а) второй может расставлять цифры так, чтобы получившаяся при этом разность стала не больше 4000, независимо от того, какие цифры называл первый;

б) первый может называть цифры так, чтобы разность стала не меньше 4000, независимо от того, куда расставляет цифры второй.

**154.** На прямой даны 50 отрезков. Докажите, что верно хотя бы одно из следующих утверждений.

- а) некоторые восемь отрезков имеют общую точку;
- б) найдутся 8 отрезков, никакие два из которых не имеют общей точки.

**155\*.** Даны несколько квадратов, сумма площадей которых равна 1. Докажите, что их можно поместить без наложений в квадрат площадью 2.

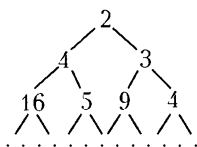
**156.** В прямоугольнике  $ABCD$  точка  $M$  — середина стороны  $AD$ , точка  $N$  — середина стороны  $BC$ . На продолжении отрезка  $DC$  за точку  $D$  берется точка  $P$ . Обозначим точку пересечения прямых  $PM$  и  $AC$  через  $Q$ . Докажите, что  $\angle QNM = \angle MNP$ .

**157.** Сумма  $n$  положительных чисел  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  равна 1. Пусть  $S$  — наибольшее из чисел

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \dots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\dots+x_n}.$$

Найдите наименьшее возможное значение  $S$ . При каких значениях  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  оно достигается?

**158.** Треугольная таблица строится по следующему правилу: в верхней строке написано натуральное число  $a > 1$ , а далее под каждым числом  $k$  слева пишется число  $k^2$ , а справа — число  $k+1$ . Например, при  $a = 2$  получается такая таблица:



Докажите, что в каждой строчке таблицы все числа различны.

**159.** Можно ли расставить цифры 0, 1, 2 в клетках листа клетчатой бумаги размером  $100 \times 100$  таким образом, чтобы в каждом прямоугольнике  $3 \times 4$ , стороны которого идут по сторонам клеток, оказалось бы три нуля, четыре единицы и пять двоек?

**160.** Когда закончился хоккейный турнир (в один круг), оказалось, что для любой группы команд можно найти команду (может быть, из той же группы), которая набрала в играх с командами этой группы нечетное число очков. Докажите, что в турнире участвовало четное число команд. (Поражение — 0 очков, ничья — 1 очко, выигрыш — 2 очка.)

**161.** Озеро имеет форму невыпуклого  $n$ -угольника. Докажите, что множество точек озера, из которых видны все его берега, либо пусто, либо заполняет внутренность выпуклого  $m$ -угольника, где  $m \leq n$ .

**162.** Последовательность  $(A)$  натуральных чисел  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$  такова, что каждое натуральное число либо входит в последовательность  $(A)$ , либо представляется в виде суммы двух чисел из последовательности  $(A)$ , быть может одинаковых. Докажите, что  $a_n \leq n^2$  для всех  $n = 1, 2, \dots$

**163.** Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника взаимно перпендикулярны, то проекции их точки пересечения на все четыре стороны (или их продолжения) лежат на одной окружности.

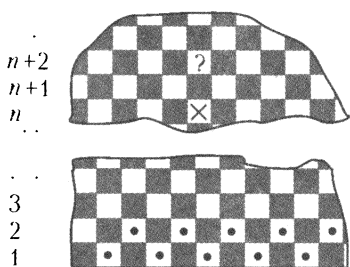


Рис. 28

ящее в некоторой клетке  $n$ -й строки (крестик на рисунке), а требуется узнать число, стоящее над ним в  $(n+2)$ -й строке (знак вопроса на рисунке). Сколько еще чисел, стоящих в двух нижних строках (отмечены точками), нужно для этого знать?

**165.** На окружности расположено множество  $F$  точек, состоящее из 100 дуг. Известно, что при любом повороте  $R$  окружности множество  $R(F)$  имеет общую точку с  $F$ . (Другими словами, для любого  $\alpha$  от 0 до  $180^\circ$  в множестве  $F$  можно указать две точки, отстоящие друг от друга на  $\alpha$ .) Какую наименьшую сумму длин могут иметь 100 дуг, образующих множество  $F$ ? Каков будет ответ, если дуг не 100, а  $n$ ?

**166.** а) Школьники одного класса в сентябре ходили в два туристических похода. В первом походе мальчиков было меньше  $2/5$  общего числа участников этого похода и во втором — тоже меньше  $2/5$ . Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше  $4/7$  общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников был по крайней мере в одном походе.

б) Пусть в  $i$ -м походе ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) мальчики составляли часть  $\alpha_i$  общего количества участников этого похода. Какую наибольшую долю могут составлять мальчики на общей встрече всех туристов (всех, кто был хотя бы в одном из  $n$  походов)?

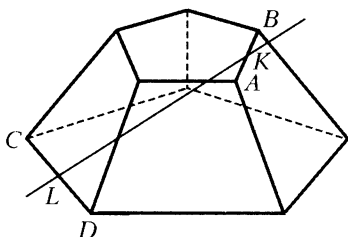


Рис. 29

**164.** В белых клетках бесконечной шахматной доски, заполняющей верхнюю полуплоскость (рис.28), записаны какие-то числа так, что для каждой черной клетки сумма чисел, стоящих в двух соседних с ней клетках — справа и слева, — равна сумме двух других чисел, стоящих в соседних с ней клетках — сверху и снизу. Известно число, стоящее

**167.** Докажите, что в любой арифметической прогрессии  $a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots$ , составленной из натуральных чисел, найдется бесконечно много членов, в разложении которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

**168.** В правильной усеченной пирамиде (рис.29) точка

$K$  середина некоторой стороны  $AB$  верхнего основания,  
 $L$  середина некоторой стороны  $CD$  нижнего основания  
 Докажите, что проекции отрезков  $AB$  и  $CD$  на прямую  $KL$  равны по длине.

**169.** Пусть  $k < n$  – натуральные числа. Расставьте числа 1, 2, 3, ...,  $n^2$  в таблицу  $n \times n$  так, чтобы в каждой строке числа шли в порядке возрастания и при этом сумма чисел в  $k$ -м столбце была: а) наименьшей; б) наибольшей.

**170.** а) Пусть  $M$  и  $N$  – точки касания окружности, вписанной в треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB$  и  $AC$ , а  $P$  – точка пересечения прямой  $MN$  с биссектрисой угла  $B$ . Докажите, что угол  $BPC$  – прямой.

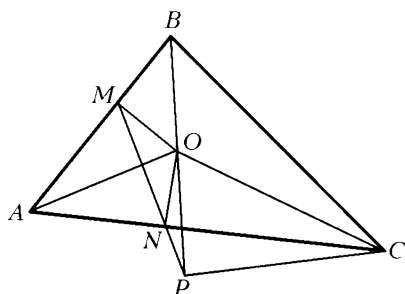


Рис. 30

б) Докажите более общий факт: если точка  $O$ , расположенная внутри треугольника  $ABC$ , такова, что  $\angle BOC - \angle BAO = 90^\circ$ , точки  $M$  и  $N$  – основания перпендикуляров, опущенных из точки  $O$  на стороны  $AB$  и  $AC$ , а  $P$  – точка пересечения прямых  $BO$  и  $MN$ , то  $\angle BPC = 90^\circ$  (рис.30).

**171.** На плоскости нарисован правильный шестиугольник, длина стороны которого равна 1. При помощи только линейки постройте отрезок длиной  $\sqrt{7}$ .

**172.** Докажите, что при любом простом  $p$  число

$$\underbrace{11\dots1}_p \underbrace{22\dots2}_p \underbrace{33\dots3}_p \underbrace{99\dots9}_p - 123456789$$

делится на  $p$ .

**173.** В квадратной таблице  $4 \times 4$  расставлены числа 1, 2, 3, ..., 16 так, что сумма четырех чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей равна одному и тому же числу, причем 1 и 16 стоят в противоположных углах таблицы. Докажите, что в этом «магическом квадрате» сумма любых двух чисел, расположенных симметрично относительно центра квадрата, одна и та же.

**174.** На сторонах треугольника  $ABC$ , как на основаниях, построены равнобедренные треугольники  $AB_1C$ ,  $BA_1C$  и  $AC_1B$  (рис.31). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек

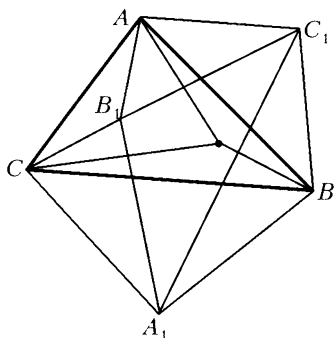


Рис. 31

ных вершин  $A$  и  $B$  отрезок  $AB$  не был параллелен ни одной из сторон (на рисунке 32  $m = 6$ ). Каково наибольшее возможное значение  $N$  (при заданном  $m$ )?

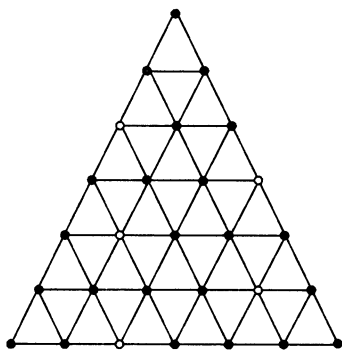


Рис. 32

$\dots + x_k = m$ , удовлетворяющих условию  $0 \leq x_i \leq m$  (для всех  $i = 1, 2, \dots, k$ ), нужно выбрать  $N$  решений так, чтобы ни в каких двух из выбранных решений никакое неизвестное  $x_i$  не принимало одного и того же значения. Чему равно наибольшее возможное значение  $N$ ?

(Задачи а) и б) являются частным случаем задачи в) при  $k = 3$  и  $k = 4$  соответственно.)

**176.** К какой стороне треугольника  $ABC$  ближе всего расположена точка пересечения его высот, если  $\angle A < \angle B < \angle C$ ? А к какой вершине?

**177.** Найдите все решения уравнения

$$\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a,$$

$A, B, C$  на прямые  $B_1C_1, C_1A_1$  и  $A_1B_1$  соответственно, пересекаются в одной точке.

**175\*.** а) Каждая сторона правильного треугольника разбита на  $m$  равных частей, и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам, разрезающие треугольник на  $m^2$  маленьких треугольников. Среди вершин полученных треугольников нужно отметить  $N$  вершин так, чтобы ни для каких двух отмеченных вершин  $A$  и  $B$  отрезок  $AB$  не был параллелен ни одной из сторон (на рисунке 32  $m = 6$ ). Каково наибольшее возможное значение  $N$  (при заданном  $m$ )?

б) Разделим каждое ребро тетраэдра на  $m$  равных частей, и через точки деления проведем плоскости, параллельные граням. Среди вершин полученных многогранников отметим  $N$  вершин так, чтобы никакие две отмеченные вершины не лежали на прямой, параллельной одной из граней. Каково наибольшее возможное  $N$ ?

в) Среди целочисленных решений уравнения  $x_1 + x_2 + \dots$

$\dots + x_k = m$ , удовлетворяющих условию  $0 \leq x_i \leq m$  (для всех  $i = 1, 2, \dots, k$ ), нужно выбрать  $N$  решений так, чтобы ни в каких двух из выбранных решений никакое неизвестное  $x_i$  не принимало одного и того же значения. Чему равно наибольшее возможное значение  $N$ ?

(Задачи а) и б) являются частным случаем задачи в) при  $k = 3$  и  $k = 4$  соответственно.)

**176.** К какой стороне треугольника  $ABC$  ближе всего расположена точка пересечения его высот, если  $\angle A < \angle B < \angle C$ ? А к какой вершине?

**177.** Найдите все решения уравнения

$$\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a,$$



где  $a$  — заданное вещественное число,  $n$  — натуральное число, большее единицы.

**178.** Опустим из любой точки  $P$  биссектрисы угла  $A$  треугольника  $ABC$  перпендикуляры  $PA_1$ ,  $PB_1$ ,  $PC_1$  на его стороны  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно. Пусть  $R$  — точка пересечения прямых  $PA_1$  и  $B_1C_1$ . Докажите, что прямая  $AR$  делит сторону  $BC$  пополам.

**179.** Для каждого непрямоугольного треугольника  $T$  обозначим через  $T_1 = H(T)$  треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника  $T$ ; через  $T_2 = H(T_1)$  — треугольник, вершинами которого служат основания высот треугольника  $T_1$ ; пусть далее  $T_3 = H(T_2)$ ;  $T_4 = H(T_3)$ , ... Какими должны быть углы треугольника  $T$ , чтобы:

а) треугольник  $T_1$  был остроугольным;  
б) в последовательности  $T_1, T_2, T_3, \dots$  встретился прямоугольный треугольник  $T_n$  (в этом случае  $H(T_n) = T_{n+1}$  не определено);

в) треугольник  $T_3$  был подобен треугольнику  $T$ ?

г) Для каждого  $n = 1, 2, 3, \dots$  укажите, сколько существует неподобных друг другу треугольников  $T$ , для которых  $T_n$  подобен  $T$ .

**180\*.** Двое играют в такую игру. Один задумывает натуральное число  $n$ , а другой задает вопросы типа «верно ли, что  $n \geq x$ » ( $x$  он может выбирать по своему усмотрению) и получает ответы «да» или «нет». Каждой возможной стратегии  $T$  второго игрока сопоставим функцию  $f_T(n)$ , равную числу вопросов (до отгадывания), если было задумано число  $n$ . Пусть, например, стратегия  $T$  состоит в том, что сначала задаются вопросы: «верно ли, что  $n \geq 10$ », «что  $n \geq 20$ », ... до тех пор, пока на какой-то вопрос «верно ли, что  $n \geq 10(k+1)$ » не будет дан ответ «нет», а затем задаются вопросы «верно ли, что  $n \geq 10k+1$ », «что  $n \geq 10k+2$ » и так далее. Тогда  $f_T(n) = \frac{n-a}{10} + a + 2$ , где  $a$  — последняя цифра числа  $n$ , т.е.  $f_T(n)$  растет примерно как  $\frac{n}{10}$ .

а) Предложите стратегию, для которой функция  $f_T(n)$  растет возможно медленнее.

б) Сравнивая две стратегии, удобно ввести вместо функции  $f_T(n)$  функцию  $f'_T(n) = \max_{1 \leq k \leq n} f_T(k)$  — она показывает, за какое

число вопросов можно угадать любое число, не превосходящее  $n$ .  
Оцените снизу  $f'_T(n)$  для произвольной стратегии  $T$ .

### 1973 ГОД

**181.** Какую наименьшую длину должен иметь кусок проволоки, чтобы из него можно было согнуть каркас куба с ребром 10 см? (Проволока может проходить по одному ребру дважды, загибаться на  $90^\circ$  и  $180^\circ$ , но ломать ее нельзя.)

**182.** Докажите, что:

а) если  $a > 0$ ,  $b > 0$  и  $c > 0$ , то  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ ;

б) если  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  и  $d > 0$ , то

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3};$$

в) если  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  — положительные числа ( $n \geq 2$ ), то

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \dots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 + a_3 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}.$$

**183.** Найдите высоту трапеции, у которой основания равны  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ), угол между диагоналями  $90^\circ$ , а угол между продолжениями боковых сторон  $45^\circ$ .

**184.** Докажите тождество

$$\frac{C_n^0}{x} - \frac{C_n^1}{x+1} + \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{x+n} = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

**185.** На кафтане площадью 1 помещается 5 заплат, площадь каждой из которых не меньше  $1/2$ . Докажите, что найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше  $1/5$ .

**186.** Найдите все решения уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

в целых числах, отличных от 1.

**187.** На плоскости заданы две точки  $A$  и  $B$ . Найдите геометрическое место третьих вершин  $C$  треугольника  $ABC$ , у которого:

а) высота  $AA'$  равна стороне  $BC$ ;

б) медиана  $AA_1$  равна стороне  $AC$ ;

- в) медиана  $AA_1$  равна стороне  $BC$ ;
- г) высота  $CC'$  равна медиане  $BB_1$ ;
- д) высота  $BB'$  равна медиане  $CC_1$ .

**188.** Между некоторыми из  $2n$  городов установлено воздушное сообщение, причем каждый город связан не менее чем с  $n$  другими (беспосадочными рейсами). Докажите, что даже если отменить любые  $n - 1$  рейсов, то все равно из любого города можно добраться в любой другой город на самолетах (с пересадками). Укажите все случаи, когда такая «связность» нарушается при отмене  $n$  рейсов.

**189.** Три отрезка  $AB$ ,  $EF$  и  $CD$  проходят через одну точку  $O$ , причем точка  $E$  лежит на отрезке  $AC$ , а точка  $F$  — на отрезке  $BD$ . Докажите, что  $EF$  меньше хотя бы одного из отрезков  $AB$  и  $CD$  (рис.33).

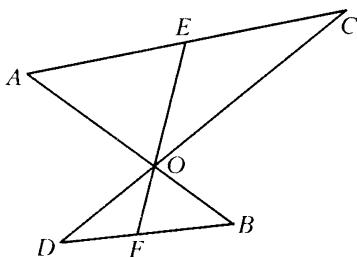


Рис. 33

**190.** На плоскости даны две прямые  $a$  и  $b$ . В точке  $A_1$ , находящейся на прямой  $a$  на расстоянии меньше 1 от прямой  $b$ , сидит блоха. Затем блоха последовательно прыгает в точки  $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \dots$ , руководствуясь следующими правилами (рис.34):

(1) точки  $A_1, A_2, A_3, \dots$  лежат на прямой  $a$ , точки  $B_1, B_2, B_3, \dots$  — на прямой  $b$ ;

(2)  $A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3 = A_3B_3 = \dots = 1$ ;

(3) точка  $A_n$  не совпадает с  $A_{n+1}$ , кроме случая, когда  $A_nB_n \perp a$  (и, аналогично,  $B_n$  совпадает с  $B_{n+1}$ , только если  $B_nA_{n+1} \perp b$ ).

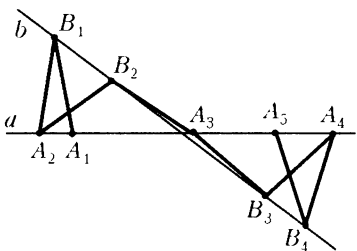


Рис. 34

(Нетрудно видеть, что условиями (1) — (3) последовательность прыжков, начиная с  $B_1A_2$ , определяется однозначно.)

Докажите, что если угол между прямыми  $a$  и  $b$  измеряется рациональным числом градусов, то путь блохи будет периодическим, т.е. в некоторый момент она попадет в начальную точку  $A_1$  и затем будет последовательно проходить те же самые точки  $B_2, A_2, B_3, \dots$ , как в начале пути, а если — иррациональным числом, то блоха не попадет ни в какую точку более двух раз.

**191.** На плоскости даны две точки  $A$  и  $B$  и прямая  $l$ , проходящая через точку  $A$  и не проходящая через точку  $B$ . Через точки  $A$  и  $B$  проводится произвольная окружность. Пусть  $O$  – ее центр,  $C$  – точка ее пересечения с прямой  $l$ , отличная от  $A$ . Найдите геометрическое место середин отрезков  $OC$ .

**192.** Даны числа  $1, 2, 3, \dots, 1000$ . Найдите наибольшее  $m$ , обладающее таким свойством: какие бы  $m$  из данных чисел ни вычеркнуть, среди оставшихся  $1000 - m$  чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

**193.** Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образуемых парами сторон и диагоналями выпуклого пятиугольника (рис.35), больше площади всего пятиугольника.

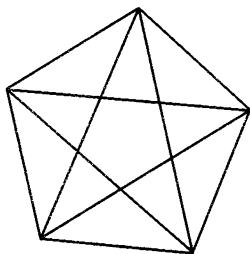


Рис. 35

**194.** Даны два взаимно простых натуральных числа  $a$  и  $b$ . Известно, что всякое целое число можно представить в виде  $ax + by$ , где  $x$  и  $y$  – целые. Рассмотрим множество  $M$  целых чисел, которые представимы в виде  $ax + by$ , где  $x$  и  $y$  – целые неотрицательные числа.

а) Каково наибольшее число  $c$ , не принадлежащее множеству  $M$ ?

б) Докажите, что из двух чисел  $n$  и  $c - n$  (где  $n$  – любое целое) одно принадлежит  $M$ , а другое нет.

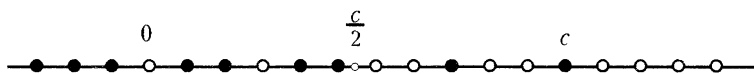


Рис. 36

(На рисунке 36 для  $a = 3$  и  $b = 7$  целые точки, принадлежащие множеству  $M$ , – белые, не принадлежащие – черные).

**195.** Дан треугольник  $ABC$ . Сколько существует таких точек  $D$ , что периметры четырехугольников  $ADBC$ ,  $ABCD$  и  $ABDC$  одинаковы?

**196.** В окружности радиусом 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более  $k$  хорд, то сумма длин хорд меньше  $\pi k$ .

**197.** В прямоугольную таблицу из  $m$  строк и  $n$  столбцов записаны  $mn$  произвольных положительных чисел. Найдем произведение чисел в каждом столбце и затем – сумму  $S$  всех  $n$  таких произведений. Докажите, что если переставить числа в каждой строке в порядке возрастания, то сумма  $S$  для новой таблицы будет не меньше, чем в первоначальной. (На рисунке 37

приведен один пример ситуации, описанной в задаче; здесь  $m = 3, n = 4$ .) Решите эту задачу:

а) для  $m = n = 2$  (для таблицы  $2 \times 2$ );

б) для  $m = 2$  и произвольного  $n$  (для таблицы из двух строк);

в) для любых натуральных  $m$  и  $n$ .

1	5	6	2
4	3	7	2
1	2	1	2
4	30	42	8

$$S = 84$$

Рис. 37

1	2	5	6
2	3	4	7
1	1	2	2
2	6	40	84

$$S = 132$$

**198.** Дан параллелограмм  $ABCD$ . На прямых  $AB$  и  $BC$  соответственно выбраны точки  $H$  и  $K$  так, что треугольники  $KAB$  и  $HCB$  равнобедренные ( $KA = AB$  и  $HC = CB$ ; рис.38). Докажите, что треугольник  $KDH$  — тоже равнобедренный.

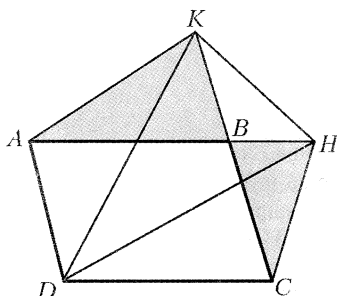


Рис. 38

**199.** а) Докажите, что сумма

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 \frac{1}{4} + C_{n-2}^2 \frac{1}{4^2} - \dots \\ \dots + (-1)^i C_{n-i}^i \frac{1}{4^i} + \dots$$

(сумма берется по всем целым  $i$ ,

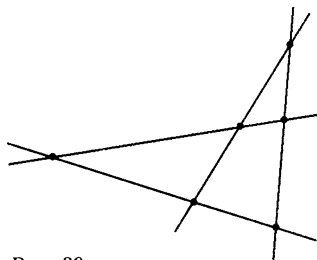
$$0 \leq i \leq \frac{n}{2}) \text{ равна } \frac{n+1}{2^n}.$$

б) Докажите, что если  $p$  и  $q$  — различные числа и  $p + q = 1$ , то сумма

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + C_{n-2}^2 p^2 q^2 - \dots + (-1)^i C_{n-i}^i p^i q^i + \dots,$$

аналогичная предыдущей, равна  $\frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$  при произвольном  $n$ .

**200.** а) На рисунке 39 изображены шесть точек, которые лежат по три на четырех прямых. Докажите, что можно 24 разными способами отобразить это множество из шести точек на себя так, чтобы каждые три точки, лежащие на одной прямой, отображались в три точки, лежащие на одной прямой.



б) На рисунке 40 девять точек лежат по три на девяти прямых,

Рис. 39

причем через каждую точку проходит по три таких прямых. Эти девять точек и девять прямых образуют знаменитую «конфигурацию Паскаля». Сколькими способами можно множество наших девяти точек отобразить на себя так, чтобы каждая тройка

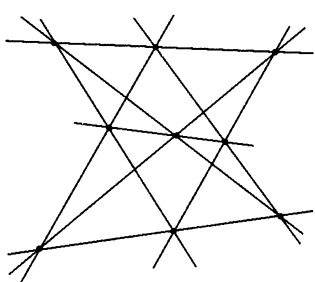


Рис. 40

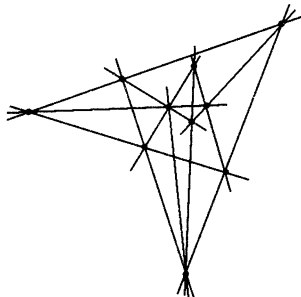


Рис. 41

точек, лежащая на одной из девяти наших прямых, отображалась на тройку точек, которая тоже лежит на некоторой прямой из нашей конфигурации?

в) Тот же вопрос для конфигурации Дезарга (из десяти точек и десяти прямых), изображенной на рисунке 41.

**201.** Прямая  $l_1$  пересекает стороны  $a, b$  и  $c$  треугольника (или их продолжения) в точках  $A_1, B_1, C_1$  соответственно; прямая  $l_2$  пересекает их в точках  $A_2, B_2, C_2$ . Докажите, что если точки  $A_1$  и  $A_2$  симметричны относительно середины стороны  $a$ , а точки  $B_1$  и  $B_2$  симметричны относительно середины стороны  $b$ , то точки  $C_1$  и  $C_2$  симметричны относительно середины стороны  $c$ .

**202.** Докажите, что из последовательности  $a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots$ , являющейся бесконечной арифметической прогрессией ( $d \neq 0$ ), тогда и только тогда можно выбрать подпоследовательность, являющуюся бесконечной геометрической прогрессией, когда отношение  $a/d$  рационально.

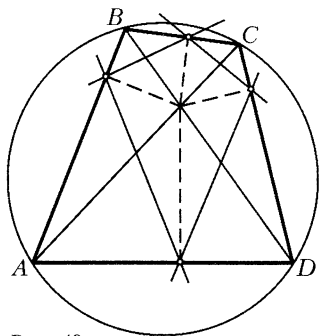


Рис. 42

**203.** а) Докажите, что если проекции точки пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  вписанного четырехугольника  $ABCD$  на прямые  $AB, BC, CD$  и  $DA$  соединить последовательно четырьмя прямыми (рис. 42), то эти прямые будут касаться одной окружности.

б) Сформулируйте и докажите обратную теорему.

**204.** Назовем натуральное число «хорошим», если в его десятичной записи встречаются подряд цифры 1, 9, 7, 3, и «плохим» – в противном случае. (Например, число 197639917 – «плохое», 116519732 – «хорошее».) Докажите, что существует такое натуральное число  $n$ , что среди всех  $n$ -значных чисел (от  $10^{n-1}$  до  $10^n - 1$ ) больше «хороших», чем «плохих». Постарайтесь найти возможно меньшее такое  $n$ .

**205\*.** 24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица  $24 \times 25$ , в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент. Докажите, что:

а) можно отметить некоторые задачи «галочкой» так, что каждый из студентов решит четное число (в частности, может быть ноль) из отмеченных задач;

б) можно отметить некоторые из задач знаком «+», а некоторые из остальных – знаком «-» и приписать каждой задаче некоторое целое число положительных баллов так, что каждый студент наберет поровну баллов за задачи, отмеченные знаками «+» и «-».

*Замечание.* Эти утверждения верны только в том случае, если количество задач хотя бы на единицу больше количества студентов.

**206.** Дана бесконечная последовательность цифр. Докажите, что для любого натурального числа  $n$ , взаимно простого с числом 10, в последовательности можно указать такую группу стоящих подряд цифр, что записываемое этими цифрами число делится на  $n$ .

**207.** Даны два треугольника  $A_1A_2A_3$  и  $B_1B_2B_3$ . Опишите вокруг треугольника  $A_1A_2A_3$  треугольник  $M_1M_2M_3$  наибольшей площади, подобный треугольнику  $B_1B_2B_3$  (при этом вершина  $A_1$  должна лежать на прямой  $M_2M_3$ , вершина  $A_2$  – на прямой  $M_3M_1$ , вершина  $A_3$  – на прямой  $M_1M_2$ ).

**208.** Известно, что разность между наибольшим и наименьшим из вещественных чисел  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$  равна 1. Какой:

а) наибольшей;

б) наименьшей

может быть разность между наибольшим и наименьшим из 10 чисел

$$x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dots, \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{10}}{10} ?$$

Каков будет ответ, если чисел не 10, а  $n$ ?

**209.** Для любого треугольника  $ABC$  можно вычислить такую сумму:

$$S = \operatorname{tg}^2 \angle \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \angle \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \angle \frac{C}{2}.$$

Докажите, что:

а)  $S < 2$  для всех остроугольных и прямоугольных треугольников;

б)  $S \geq 2$  для тупоугольных треугольников с тупым углом, большим или равным  $2\arctg \frac{4}{3}$ ;

в) среди треугольников с тупым углом  $\varphi$  таким, что  $\frac{\pi}{2} < \varphi < 2\arctg \frac{4}{3}$ , имеются и такие, что  $S > 2$ , и такие, что  $S < 2$ .

**210.** Рассмотрим последовательности, состоящие из 3000 цифр 1 и 2. В каждой такой последовательности разрешается поменять местами любые две соседние тройки цифр. Две последовательности называются эквивалентными, если одну из них можно перевести в другую несколькими такими перестановками. Сколько всего существует неэквивалентных последовательностей?

**211.** Даны  $n$  точек,  $n > 4$ . Докажите, что можно соединить их стрелками так, чтобы из каждой точки в каждую можно было попасть, пройдя либо по одной стрелке, либо по двум (каждые две точки можно соединить стрелкой только в одном направлении; идти по стрелке можно только в указанном на ней направлении).

**212.** На суде в качестве вещественного доказательства предъявлены 14 монет. Эксперт обнаружил, что семь из них – фальшивые, остальные – настоящие, причем узнал, какие именно фальшивые, а какие – настоящие. Суд же знает только, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково и фальшивые легче настоящих. Эксперт хочет тремя взвешиваниями на чашечных весах без гирь доказать суду, что все обнаруженные им фальшивые монеты действительно являются фальшивыми, а остальные – настоящими. Сможет ли он это сделать?

**213.** Дан угол с вершиной  $O$  и окружность, касающаяся его сторон в точках  $A$  и  $B$ . Из точки  $A$  параллельно  $OB$  проведен луч, пересекающий окружность в точке  $C$ . Отрезок  $OC$  пересекает окружность в точке  $E$ , а прямые  $AE$  и  $OB$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что  $OK = KB$ .



**214.** Квадратный трехчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  таков, что уравнение  $f(x) = x$  не имеет вещественных корней. Докажите, что уравнение  $f(f(x)) = x$  также не имеет вещественных корней.

**215.** На бесконечном клетчатом листе белой бумаги  $n$  клеток закрашены в черный цвет. В моменты времени  $t = 1, 2, \dots$  происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка  $k$  приобретает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток — самой клетки  $k$  и ее соседей справа и сверху (если две или три из этих клеток были белыми, то  $k$  становится белой, если две или три из них были черными — то черной).

а) Докажите, что через конечное время на листе не останется черных клеток.

б) Докажите, что черные клетки исчезнут не позже чем в момент времени  $t = n$ .

**216.**  $N$  человек не знакомы между собой. Нужно так познакомиться друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трех людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом  $N$ .

**217.** Дан выпуклый  $n$ -угольник с попарно непараллельными сторонами и точка внутри него. Докажите, что через эту точку нельзя провести больше  $n$  прямых, каждая из которых делит площадь  $n$ -угольника пополам.

**218.** Докажите, что если  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  — положительные числа, то

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1).$$

**219.** В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых эти точки служат вершинами?

**220.** Король обошел шахматную доску  $8 \times 8$ , побывав на каждом поле ровно один раз и вернувшись последним ходом на исходное поле. (Король ходит по обычным правилам: за один ход он может перейти по горизонтали, вертикали или диагонали на любое соседнее поле.) Когда нарисовали его путь, последовательно соединив центры полей, которые он проходил, получилась замкнутая ломаная без самопересечений. Какую наименьшую и какую наибольшую длину может она иметь? (Сторона клетки равна единице.)

**221.** На бумагу поставили кляксу. Для каждой точки кляксы определили наименьшее расстояние от границы кляксы, а также

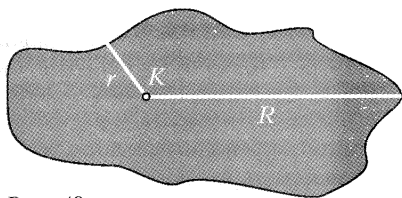


Рис. 43

наибольших выбрали наименьшее —  $R_0$ . Какую форму имеет клякса, если  $r_0 = R_0$ ?

**222.** Докажите, что у каждого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

**223.** Натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, кроме самого этого числа. (Например, число 28 — совершенное:  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ .) Докажите, что совершенное число не может быть полным квадратом.

**224.** У трехгранного угла проведены биссектрисы плоских углов. Докажите, что попарные углы между тремя этими биссектрисами либо все тупые, либо все острые, либо все прямые.

**225.** Грани кубика занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что сумма номеров на противоположных гранях равна 7. Кубик катят из левого нижнего в правый верхний угол шахматной доски размером  $50 \times 50$  клеток (каждая клетка доски равна грани кубика) так, что он каждый раз переваливается через свое

ребро на соседнюю клетку; при этом разрешается двигаться только вправо или вверх. На каждой из клеток по пути кубика пишется номер грани, которая опиралась на эту клетку. Какое наибольшее значение может иметь сумма всех 99 выписанных чисел? А какое наименьшее?

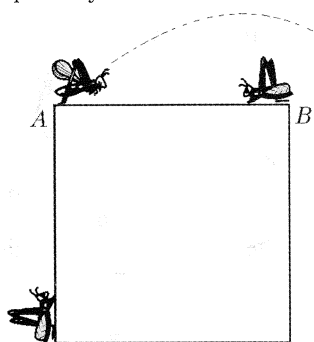


Рис. 44

**226.** В трех вершинах квадрата находятся три кузнечика. Они играют в чехарду. При этом, если кузнечик A прыгает через кузнечика B, то после прыжка он оказывается

от B на том же расстоянии (но, естественно, по другую сторону и на той же прямой; рис.44). Может ли после нескольких прыжков один из кузнечиков попасть в четвертую вершину исходного квадрата?

**227.** На каждой стороне параллелограмма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

**228.** Лист клетчатой бумаги размером  $n \times n$  раскрасили в  $n$  цветов (каждую клетку закрасили одним из этих цветов или не закрасили вообще). Правильной называется раскраска, при которой в каждой строке и в каждом столбце нет клеток одного цвета. Всегда ли можно «докрасить» весь лист правильным образом, если первоначально были правильно закрашены:

- а)  $n^2 - 1$  клетка;
- б)  $n^2 - 2$  клетки;
- в)  $n$  клеток?

**229\*.** В центре квадрата находится полицейский, а в одной из вершин – гангстер. Полицейский может бегать по всему квадрату, а гангстер – только по его сторонам. Известно, что максимальная скорость полицейского равна  $u$ , а гангстера –  $v$ . Цель полицейского – оказаться с гангстером на одной стороне квадрата. Докажите, что:

- а) если  $\frac{u}{v} > \frac{1}{3}$ , то полицейский может добиться своей цели;
- б) если  $\frac{u}{v} < \frac{1}{3}$ , то гангстер может помешать ему это сделать.

**230.** Докажите, что из любого выпуклого равностороннего (но не обязательно правильного) пятиугольника можно вырезать правильный треугольник, одна из сторон которого совпадает со стороной пятиугольника (рис.45).

**231.** Найдите все решения в натуральных числах уравнения

$$n^x + n^y = n^z.$$

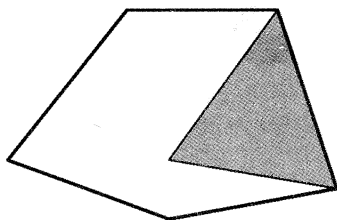


Рис. 45

**232.** а) Докажите, что к конечному множеству точек на плоскости, обладающему тем свойством, что любые три точки из этого множества являются вершинами невырожденного тупоугольного треугольника, всегда можно добавить еще одну точку так, что это свойство сохранится.

б) Справедливо ли аналогичное утверждение для бесконечного множества точек на плоскости?

**233.** В концах отрезка пишутся две единицы. Посередине между ними пишется их сумма — число 2. Затем посередине между каждыми двумя соседними из написанных чисел снова пишется их сумма и так далее — 1973 раза. Сколько раз будет написано число 1973?

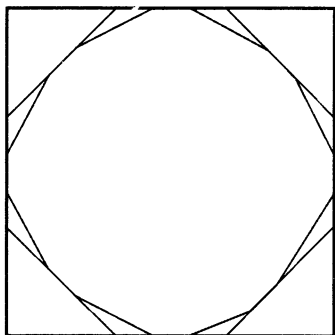


Рис. 46

**234.** Дан квадрат со стороной 1. От него отсекают четыре уголка — четыре треугольника, у каждого из которых две стороны идут по сторонам квадрата и составляют  $1/3$  их длины. С полученным 8-угольником делают то же самое: от каждой вершины отрезают треугольник, две стороны которого составляют по  $1/3$  соответствующих сторон 8-угольника, и так далее (рис.46). Получается последовательность многоугольников (каждый содержится в предыдущем). Найдите площадь фигуры, являющейся пересечением всех этих многоугольников (т.е. образованной точками, принадлежащими всем многоугольникам).

**235.** По арене круглого цирка радиусом 10 м бегают лев. Двигаясь по ломаной линии, он пробежал 30 км. Докажите, что сумма всех углов, на которые он поворачивал, не меньше 2998 радиан.

**236.** а) Имеется 51 двузначное число. Докажите, что из этих чисел можно выбрать по крайней мере 6 чисел так, чтобы никакие два из выбранных чисел ни в одном разряде не имели одинаковой цифры.

б) Даны натуральные числа  $k$  и  $n$ ,  $1 < k < n$ . Для какого наименьшего  $m$  верно следующее утверждение: при любой расстановке  $m$  ладей на доске размером  $n \times n$  клеток можно выбрать  $k$  ладей из этих  $m$  так, чтобы никакие две из этих выбранных ладей не били друг друга?

**237.** Углы остроугольного треугольника равны  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Какие массы нужно разместить в его вершинах, чтобы центр тяжести этих трех масс попал:

- а) в точку пересечения высот;
- б) в центр описанной окружности?

Стороны треугольника равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Какие массы нужно поместить в его вершины, чтобы центр тяжести попал:

- в) в точку пересечения отрезков, соединяющих вершины и

гочки касания противоположных им сторон со вписанной окружностью;

г) в центр вписанной окружности?

**238.** Докажите, что сумма

$$C_n^1 + 1973C_n^3 + (1973)^2 C_n^5 + (1973)^3 C_n^7 + \dots$$

делится на  $2^{n-1}$ . (Здесь  $C_n^k$  — коэффициенты многочлена

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} .)$$

**239.** На плоскости заданы две точки  $A$  и  $B$ . Пусть  $C$  — некоторая точка, равноудаленная от  $A$  и  $B$ . Построим последовательность точек  $C_1 = C, C_2, C_3, \dots, C_n, C_{n+1}, \dots$ , где  $C_{n+1}$  — центр окружности, описанной около треугольника  $AC_nB$ . При каком положении точки  $C$ :

а) точка  $C_n$  попадет в середину отрезка  $AB$  (при этом  $C_{n+1}$  и дальнейшие члены последовательности не определены);

б) точка  $C_n$  совпадет с  $C$ ?

**240\*.** По заданному  $x$  значение  $x^8$  можно найти за три арифметических действия:  $x^2 = x \cdot x$ ,  $x^4 = x^2 \cdot x^2$ ,  $x^8 = x^4 \cdot x^4$ , а  $x^{15}$  — за пять действий: первые три — те же самые, затем  $x^8 \cdot x^8 = x^{16}$  и  $x^{16} : x = x^{15}$ . Докажите, что:

а)  $x^{1000}$  можно найти за 12 действий (умножений и делений);

б) для любого натурального  $n$  значение  $x^n$  можно найти не более чем за  $\frac{3}{2} \log_2 n + 1$  действий.

## 1974 ГОД

**241.** Докажите, что  $3^{1974} + 5^{1974}$  делится на 13.

**242.** Пусть  $A_i H_i$  — высота и  $A_i M_i$  — медиана, проведенные из вершины  $A_i$  остроугольного треугольника  $A_1 A_2 A_3$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Докажите, что одно из трех произведений  $H_1 M_1 \cdot A_2 A_3$ ,  $H_2 M_2 \cdot A_3 A_1$ ,  $H_3 M_3 \cdot A_1 A_2$  равно сумме двух других. Верно ли это утверждение для прямоугольного и тупоугольного треугольников?

**243.** Пусть  $n$  отрезков  $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n$  (рис. 47) расположены на плоскости так, что каждый из них начинается на одной из двух данных пря-

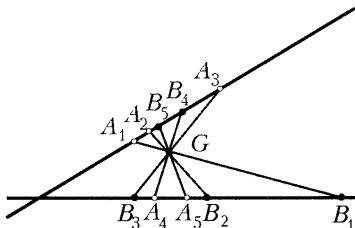


Рис. 47

мых, оканчивается на другой прямой и проходит через точку  $G$  (не лежащую на данных прямых) – центр тяжести единичных масс, помещенных в точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Докажите, что

$$\frac{A_1G}{GB_1} + \frac{A_2G}{GB_2} + \dots + \frac{A_nG}{GB_n} = n.$$

**244.** Даны два набора из  $n$  вещественных чисел:  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Докажите, что если выполняется хотя бы одно из двух условий:

1) из  $a_i < a_j$  следует, что  $b_i \leq b_j$ ,

2) из  $a_i < a < a_j$ , где  $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ , следует, что  $b_i \leq b_j$ ,

то верно неравенство

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n).$$

**245\*.** Предлагается построить  $N$  точек на плоскости так, чтобы все попарные расстояния между ними равнялись заранее заданным числам: для каждой двух точек  $M_i, M_j$  известно, чему должно равняться расстояние  $M_iM_j = r_{ij}$  ( $i$  и  $j$  – любые числа от 1 до  $N$ ).

а) Можно ли произвести построение, если расстояния  $r_{ij}$  заданы так, что всякие 5 из  $N$  точек построить можно?

б) Достаточно ли требовать, чтобы можно было построить всякие 4 из  $N$  точек?

в) Что изменится, если строить точки не на плоскости, а в пространстве? Каково тогда наименьшее  $K$ , для которого возможность построения любых  $K$  из данных  $N$  точек обеспечивает построение и всех  $N$  точек?

**246.** На плоскости даны две прямые  $m$  и  $n$  и точка  $O$ . Постройте треугольник, две высоты которого лежат на данных прямых  $m$  и  $n$ , а центр описанной окружности находится в точке  $O$ .

**247.** Квадрат  $6 \times 6$  нужно заполнить 12 плитками, из которых  $k$  имеют форму уголка, а остальные  $12 - k$  клеток – прямоугольники (рис.48). При каких  $k$  это возможно?

**248.** В выпуклый  $n$ -угольник  $A_1A_2 \dots A_n$  (рис.49) вписан  $n$ -



Рис. 48

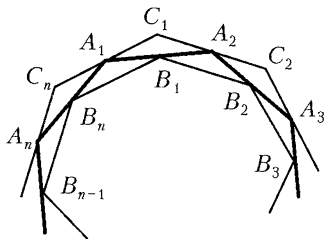


Рис. 49

угольник  $B_1B_2 \dots B_n$ , площадь которого равна  $P$  (вершина  $B_i$  лежит на стороне  $A_iA_{i+1}$  для  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , а вершина  $B_n$  — на  $A_nA_1$ ). Около того же  $n$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_n$  описан  $n$ -угольник  $C_1C_2 \dots C_n$ , площадь которого равна  $Q$ , так, что  $C_1C_2 \parallel B_1B_2$ ,  $C_2C_3 \parallel B_2B_3$ , ...,  $C_nC_1 \parallel B_nB_1$  (вершина  $A_i$  лежит на стороне  $C_{i-1}C_i$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ , а вершина  $A_1$  — на стороне  $C_nC_1$ ). Найдите площадь  $n$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_n$ .

**249.** На ребрах  $A'D'$  и  $C'D'$  куба  $ABCD A'B'C'D'$  выбирают две точки  $K$  и  $M$  так, что плоскость  $KDM$  касается шара, вписанного в куб (рис.50). Докажите, что величина  $\varphi$  двугранного угла при ребре  $B'D$  тетраэдра  $B'DKM$  не зависит от выбора точек  $K$  и  $M$ . Найдите эту величину  $\varphi$ .

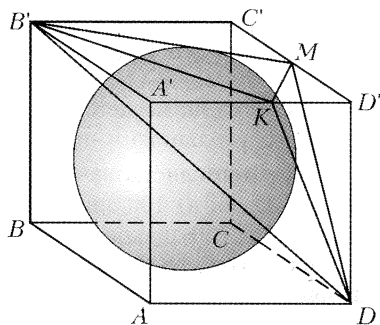


Рис. 50

**250\*.** а) При дворе короля Артура собрались  $n$  рыцарей. Некоторые из них враждуют друг с другом, но у каждого рыцаря не менее  $n/2$  друзей среди собравшихся. Докажите, что Мерлин — советник короля Артура — может усадить рыцарей за круглым столом так, чтобы рядом с каждым сидели его друзья.

б) Докажите, что если у каждого рыцаря одинаковое четное (и, конечно, положительное) количество друзей, то Мерлин может рассадить рыцарей за несколько круглых столов так, чтобы никто не сидел рядом со своим врагом (у Артура есть столики на двоих, на троих и так далее).

**251.** Даны  $n$  фишек нескольких цветов, причем фишек каждого цвета не более  $n/2$ . Докажите, что их можно расставить на окружности так, чтобы никакие две фишки одинакового цвета не стояли рядом.

**252.** а) На плоскости лежит правильный восьмиугольник со стороной  $a$ . Его разрешается «перекачивать» по плоскости, переворачивая (симметрично отражая) относительно любой стороны. Докажите, что для любой точки  $M$  плоскости и любого  $\varepsilon > 0$  можно перекачать восьми-

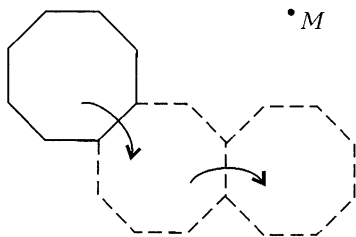


Рис. 51

угольник в такое положение, что центр его будет находиться от точки  $M$  на расстоянии меньше  $\varepsilon$  (рис.51).

б) Решите аналогичную задачу для правильного пятиугольника.

в) Для каких правильных  $n$ -угольников верно аналогичное утверждение?

**253.** На плоскости заданы три точки, являющиеся соответственно центрами вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей треугольника. Как по этим данным восстановить треугольник? (Напомним, что вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон.)

**254.** Вычислите значение  $\sqrt{0,1111...1111}$  (100 единиц) с точностью до: а) 100 знаков после запятой; б) 101 знака после запятой; в) 200 знаков после запятой.

**255.** Пусть  $AB$  и  $CD$  – две различные касательные к двум данным шарам ( $A$  и  $C$  принадлежат поверхности одного шара,  $B$  и  $D$  – другого). Докажите, что проекции отрезков  $AC$  и  $BD$  на прямую, проходящую через центры шаров, равны.

**256.** Около окружности описан многоугольник. Точки касания его сторон с окружностью служат вершинами второго, вписанного в эту окружность многоугольника. Докажите, что произведение расстояний от произвольной точки  $M$  окружности до сторон одного многоугольника равно произведению расстояний от этой точки до сторон второго. (Под расстоянием от точки  $M$  до стороны понимается расстояние до прямой, на которой лежит эта сторона.)

**257.** При каких натуральных  $n \geq 2$  неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq p(x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)$$

выполняется для любых действительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , если:

а)  $p = 1$ ; б)  $p = 4/3$ ; в)  $p = 6/5$  ?

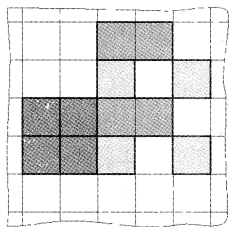


Рис. 52

**258.** На плоскости даны три точки  $K, L, N$ . Про четырехугольник известно, что он выпуклый и что середины некоторых трех его сторон лежат в данных точках  $K, L, N$ . Найдите множества точек, в которые может попасть:

- а) середина четвертой стороны;
- б) вершина этого четырехугольника.

**259.** Назовем *квартетом* четверку клеток на клетчатой бумаге, центры которых



лежат в вершинах прямоугольника со сторонами, параллельными линиям сетки. (Например, на рисунке 52 нарисовано три квартета.) Какое наибольшее число квартетов можно разместить:

а) в квадрате  $5 \times 5$ ;

б) в прямоугольнике  $m \times n$  клеток ?

**260.** Окружность разбита точками  $A_1, A_2, \dots, A_n$  на  $n$  равных частей, каждая из которых окрашена в какой-то цвет. Две дуги (с концами в точках разбиения) называются *одинаково окрашенными*, если при некотором повороте одна из них полностью, включая цвет каждой части, совпадает с другой. (Например, на рисунке 53 дуги  $A_2A_6$  и

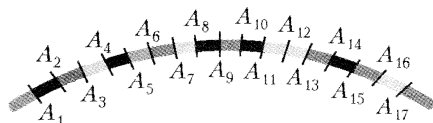


Рис. 53

$A_6A_{10}$  одинаково окрашены.) Докажите, что если для каждой точки разбиения  $A_i$  можно указать две непересекающиеся одинаково окрашенные дуги с общим концом  $A_i$ , то всю окружность можно разбить на несколько одинаково окрашенных дуг, т.е. окраска «периодическая». Рассмотрите сначала случай, когда красок всего две, скажем красная и черная.

**261.** Обруч радиусом  $R$ , висевший на неподвижном круге радиусом  $r < R$ , начинают катить по этому кругу. Докажите, что точка обруча описывает ту же траекторию, которую описывала бы точка колеса радиусом  $R - r$ , катящегося снаружи по тому же кругу радиусом  $r$  (рис. 54, а, б). (Качение происходит без скольжения — так, что длины прокатившихся друг по другу дуг равны.)

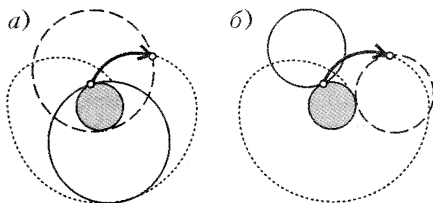


Рис. 54

**262.** Какое наибольшее число: а) ладей, б) ферзей можно расставить

на шахматной доске  $8 \times 8$  так, чтобы каждая из этих фигур была под ударом не более чем одной из остальных ?

**263.** Даны два числа  $p$  и  $q$ , большие 1. На сторонах  $BC$  и  $DC$  прямоугольника  $ABCD$  берутся точки  $P$  и  $Q$  так, что  $BC = p \cdot BP$  и  $DC = q \cdot DQ$ . При каком отношении длин сторон  $AB$  и  $AD$  угол  $PAQ$  будет иметь наибольшую величину? Какова эта наибольшая величина в частном случае  $p = 2$ ,  $q = 3/2$  (рис. 55)?

**264.** В городе одна синяя площадь и  $n$  зеленых, причем каждая зеленая площадь соединена улицами с синей и с двумя зелеными

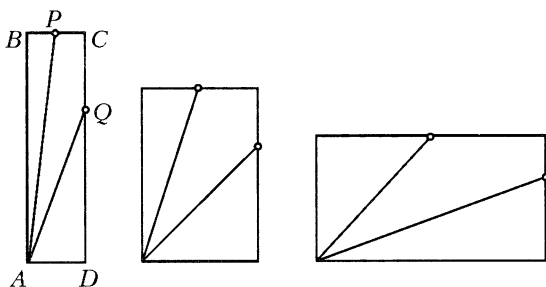


Рис. 55

(рис.56). На каждой из  $2n$  улиц ввели одностороннее движение так, что на каждую площадь можно проехать и с каждой можно уехать. Докажите, что с любой площади этого города можно, не нарушая правил, доехать до любой из остальных.

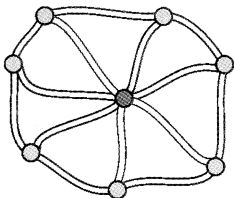


Рис. 56

**265.** Диагональ  $d$  прямоугольного параллелепипеда образует с его ребрами  $a$ ,  $b$  и с углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Докажите, что  $\alpha + \beta + \gamma$  меньше  $\pi$ .

**266.** Дан выпуклый  $n$ -угольник.

а) Докажите, что если для каждой тройки последовательных вершин  $n$ -угольника построить окружность, проходящую через эти вершины, и из  $n$  полученных окружностей выбрать такую, у которой радиус наибольший, то эта окружность содержит внутри себя весь данный  $n$ -угольник.

б) Докажите, что если для каждой тройки последовательных сторон  $n$ -угольника построить окружность, касающуюся этих сторон, и из  $n$  полученных окружностей выбрать такую, у которой радиус наименьший, то она будет содержаться внутри данного  $n$ -угольника.

**267.** В последовательности троек целых чисел  $(2, 3, 5)$ ,  $(6, 15, 10)$ , ... каждая тройка получается из предыдущей таким образом: первое число умножается на второе, второе – на третье, а третье – на первое, и полученные произведения дают новую тройку. Докажите, что ни одно из чисел, получаемых таким образом, не будет степенью целого числа: квадратом, кубом и так далее.

**268.** В углу шахматной доски стоит фигура. Первый игрок может ходить ею два раза подряд как обычным конем (на два поля в одном направлении и на одно в перпендикулярном), а второй – один раз как конем с удлинённым ходом (на три поля

в одном направлении и на одно в перпендикулярном). Так они ходят по очереди. Первый стремится к тому, чтобы поставить фигуру в противоположный угол, а второй – ему помешать. Кто из них выигрывает (размеры доски  $n \times n$ , где  $n \geq 4$ )?

**269.** Обозначим через  $T_k(n)$  сумму произведений по  $k$  чисел от 1 до  $n$ . Например,

$$T_2(4) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 35.$$

а) Найдите общую формулу для  $T_2(n)$  и  $T_3(n)$ .

б) Докажите, что  $T_k(n)$  выражается многочленом от  $n$  степени  $2k$  (для натурального  $k \geq 2$ ).

в) Укажите метод нахождения многочленов  $T_k(n)$  ( $k = 2, 3, 4, 5, \dots$ ) и примените его для отыскания многочленов  $T_4(n)$  и  $T_5(n)$ .

**270.** Пусть  $AB$  и  $CD$  – две хорды окружности, а точки  $K$  и  $H$  построены так, что все четыре угла  $KAB$ ,  $KCD$ ,  $HBA$  и  $HDC$  – прямые. Докажите, что прямая  $KH$  проходит через центр окружности и точку пересечения прямых  $AD$  и  $BC$ .

**271.** Можно ли расставить числа  $1, 2, 3, \dots, n$  в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел их полусумма не равнялась ни одному из чисел, поставленных между ними?

**272.** Даны две окружности с радиусами  $r$  и  $R$ , касающиеся внешним образом. Строятся различные трапеции  $ABCD$  так, чтобы каждая из окружностей касалась обеих боковых сторон и одного из оснований трапеции. Найдите наименьшую возможную длину боковой стороны  $AB$ .

**273.** На отрезке  $0 \leq x \leq 1$  задана функция  $f$ . Известно, что эта функция неотрицательна и  $f(1) = 1$ . Кроме того, для любых двух чисел  $x_1$  и  $x_2$  таких, что  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  и  $x_1 + x_2 \leq 1$ , выполнено неравенство  $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$ .

а) Докажите, что какова бы ни была функция  $f$ , удовлетворяющая перечисленным условиям, для всех  $x$  будет выполнено неравенство  $f(x) \leq 2x$ .

б) Верно ли, что для всех  $x$  справедливо  $f(x) \leq 1,9x$ ?

**274.** Найдите наименьшее число вида:

а)  $|11^k - 5^l|$ ; б)  $|36^k - 5^l|$ ; в)  $|53^k - 37^l|$ ;

здесь  $k$  и  $l$  – натуральные числа.

**275\*.** а) На плоскости даны  $n$  векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех  $n$  векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы

при всех  $k = 1, 2, \dots, n$  выполнялось следующее условие: сумма первых  $k$  векторов имеет длину не более 3.

б) Докажите аналогичное утверждение для  $n$  векторов с суммой 0, длина каждого из которых *не превосходит* 1.

в) Можно ли заменить число 3 в задаче а) меньшим? Постарайтесь улучшить оценку также в задаче б).

**276.** Дан квадрат  $ABCD$ . Точки  $P$  и  $Q$  лежат на сторонах  $AB$  и  $BC$  соответственно, причем  $BP = BQ$ . Пусть  $H$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $B$  на отрезок  $PC$ . Докажите, что угол  $DHQ$  — прямой.

**277.** Задано несколько красных и несколько синих точек. Некоторые из них соединены отрезками. Назовем точку «особой», если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. Если есть хотя бы одна особая точка, то выбирается любая особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

**278.** а) Каждая из сторон выпуклого шестиугольника имеет длину больше 1. Всегда ли в нем найдется диагональ длиной больше 2?

б) В выпуклом шестиугольнике  $ABCDEF$  длины диагоналей  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  больше 2. Всегда ли у него найдется сторона длиной больше 1?

**279.** На  $n$  карточках, выложенных по окружности, записаны числа, каждое из которых равно  $+1$  или  $-1$ . За какое наименьшее число вопросов можно наверняка определить произведение всех  $n$  чисел, если за один вопрос разрешается узнать:

а) произведение чисел на любых трех карточках;

б) произведение чисел на любых трех карточках, лежащих подряд?

(Здесь  $n$  — натуральное число больше 3).

**280.** Дан треугольник  $ABC$  площадью 1. Пусть  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — середины сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$  соответственно. Какую минимальную площадь может иметь общая часть треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $KLM$ , если точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  лежат на отрезках  $AB_1$ ,  $CA_1$  и  $BC_1$  соответственно?

**281.** Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого имеют одинаковые длины?

**282.** В клетках прямоугольной таблицы размером  $m \times n$  записаны любые натуральные числа. За один ход разрешается удвоить все числа одной строки или же вычесть единицу из всех чисел одного столбца. Докажите, что за несколько ходов можно добиться, чтобы все числа стали равными нулю.

**283.** Выпуклый многоугольник обладает следующим свойством: если все его стороны отодвинуть на единицу во внешнюю сторону, то полученные прямые образуют многоугольник, подобный исходному. Докажите, что в этот многоугольник можно вписать окружность.

**284\*.** Сумма 100 натуральных чисел, каждое из которых не больше 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел, сумма которых равна 100.

**285\*.** Прямоугольный лист бумаги размером  $a \times b$  разрезан на прямоугольные полоски, у каждой из которых одна сторона имеет длину 1. Докажите, что хотя бы одно из чисел  $a$  и  $b$  — целое.

**286.** На плоскости расположены  $N$  точек. Отметим все середины отрезков с концами в этих точках. Какое наименьшее количество точек плоскости может оказаться отмеченным?

**287.** Существует ли такая последовательность натуральных чисел, что любое натуральное число 1, 2, 3, ... можно представить в виде разности двух чисел этой последовательности единственным образом?

**288.** На конгрессе собрались ученые, среди которых есть друзья. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющие на конгрессе равное число друзей, не имеют общих друзей. Докажите, что найдется ученый, у которого ровно один друг.

**289.**  $N$  гирь, масса каждой из которых — целое число граммов, разложены на  $K$  равных по массе кучек. Докажите, что можно не менее чем  $K$  разными способами убрать одну из гирь так, что оставшиеся  $(N - 1)$  гири уже нельзя разложить на  $K$  равных по массе кучек.

**290.** Для каких  $n$  существует такая замкнутая несамопересекающаяся ломаная из  $n$  звеньев, что любая прямая, содержащая одно из звеньев этой ломаной, содержит еще хотя бы одно ее звено?

**291.** На сторонах  $A_2A_3$ ,  $A_3A_1$ ,  $A_1A_2$  треугольника  $A_1A_2A_3$  построены квадраты с центрами  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ , лежащие вне треугольника. Докажите, что:

а) отрезки  $O_1O_2$  и  $A_3O_3$  равны по длине и взаимно перпендикулярны;

б) середины отрезков  $A_3A_1$ ,  $O_1O_2$ ,  $A_3A_2$ ,  $A_3O_3$  являются вершинами квадрата;

в) площадь этого квадрата в 8 раз меньше площади квадрата с центром  $O_3$ .

**292.** На доске выписаны числа от 1 до 50. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать одно число —

модуль их разности. После повторения указанной процедуры на доске останется одно число. Какое это может быть число?

**293.** Дан треугольник  $C_1C_2O$ . В нем проводится биссектриса  $C_2C_3$ , затем в треугольнике  $C_2C_3O$  проводится биссектриса  $C_3C_4$  и так далее. Докажите, что последовательность величин углов  $\gamma_n = \angle C_{n+1}C_nO$  стремится к пределу, и найдите этот предел, если  $\angle C_1OC_2 = \alpha$ .

**294.** Докажите, что если  $a, b, c, d, x, y, u, v$  — вещественные числа и  $abcd > 0$ , то

$$(ax + bu)(av + by)(cx + dv)(cu + dy) \geq \\ \geq (acuvx + bcuxy + advxy + bduvy)(acx + bcu + adv + bdy).$$

**295.** Сечения выпуклого многогранника тремя параллельными плоскостями  $p_0, p_1$  и  $p_2$  ( $p_1$  расположена между  $p_0$  и  $p_2$  на одном и том же расстоянии  $h$  от той и другой) имеют площади  $S_0, S_1, S_2$  соответственно. Между  $p_0$  и  $p_1$  нет ни одной вершины многогранника.

а) Докажите, что  $2\sqrt{S_1} \geq \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2}$ .

б) В каком случае неравенство обращается в равенство?

в) Найдите площадь  $S_t$  сечения многогранника плоскостью, параллельной  $p_0$  и расположенной на расстояниях  $th$  от  $p_0$  и  $(2-t)h$  от  $p_2$  ( $0 < t < 2$ ).

г) Найдите объем части многогранника, заключенной между плоскостями  $p_0$  и  $p_2$ .

**296.** В таблицу  $n \times n$  записаны  $n^2$  чисел, сумма которых неотрицательна. Докажите, что можно переставить столбцы таблицы так, что сумма  $n$  чисел по диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, будет неотрицательна.

**297.** На плоскости заданы 12 точек, являющихся вершинами четырех квадратов  $A_1B_1A_2C_1, A_2C_2A_3B_2, A_3B_3A_4C_3$  и  $A_4C_4A_1B_4$  (вершины каждого квадрата перечислены по часовой стрелке). Докажите, что  $B_1B_2B_3B_4$  и  $C_1C_2C_3C_4$  — равные параллелограммы, один из которых получается из другого поворотом на  $90^\circ$  (эти параллелограммы могут быть вырожденными: четыре вершины каждого из них в этом случае лежат на одной прямой).

**298.** Запишем все несократимые дроби  $\frac{p}{q}$ , где  $0 < p < q \leq m$ , в порядке возрастания ( $m$  — данное натуральное число). Например, при  $m = 5$  получится последовательность

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}.$$

Докажите, что для любых двух соседних дробей  $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$  в такой последовательности выполняется равенство  $qr - ps = 1$ .

**299.** При каких  $n$  правильный  $n$ -угольник можно разместить на листе бумаги в линейку так, чтобы все вершины лежали на линиях? (Линии — параллельные прямые, расположенные на одинаковых расстояниях друг от друга.)

**300.** Алфавит состоит из трех букв:  $a, b, c$ . Назовем *словом* последовательность любой длины, состоящую из этих букв. При образовании слов некоторые буквосочетания (из двух и более букв) считаются запрещенными. Известно, что в списке запрещенных буквосочетаний все слова имеют разные длины. Докажите, что существуют слова любой длины, не содержащие запрещенных буквосочетаний.

### 1975 ГОД

**301.** На плоскости заданы  $2n$  точек —  $n$  белых и  $n$  черных, причем никакие три точки не лежат на одной прямой (рис.57). Докажите, что можно провести  $n$  отрезков так, что у каждого отрезка один конец лежит в черной точке, другой — в белой точке и никакие два отрезка не имеют общих точек.

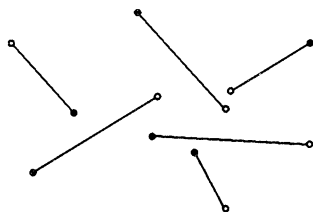


Рис. 57

**302.** Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей трапеции  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ),  $A'$  и  $B'$  — точки, симметричные точкам  $A$  и  $B$  относительно биссектрисы угла  $AOB$  (рис.58). Докажите, что  $\angle ACA' = \angle BDB'$ .

**303.** Прямоугольник  $300 \times 1000$  разрезан на квадраты  $1 \times 1$ , и в некоторых 30 вершинах квадратов помещены одинаковые гири. Докажите, что можно выбрать две непересекающиеся группы гирек — не более чем по 10 в каждой — так, что их центры тяжести совпадут.

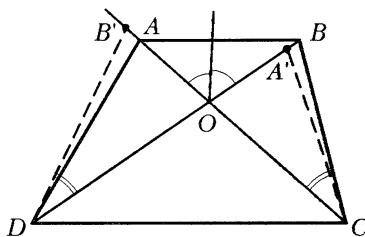


Рис. 58

**304.** Будем обозначать кружочком некоторую (неизвестную пока) операцию, применимую к любым двум целым неотрицательным числам  $a$  и  $b$  и дающую в результате тоже целое

неотрицательное число  $a \circ b = c$ . Пусть операция « $\circ$ » удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $a \circ b = b \circ a$ ;
- 2) если  $a \circ b = c$ , то  $b \circ c = a$ ;
- 3) если  $a \circ b > c$ , то  $b \circ c < a$  или  $a \circ c < b$ .

а) Найдите  $0 \circ 0$ ;  $0 \circ 1$ ;  $1 \circ 1$ ;  $0 \circ 2$ .

б) Докажите, что  $0 \circ a = a$  и

$1 \circ a = a + 1$ , если  $a$  четно,

$1 \circ a = a - 1$ , если  $a$  нечетно.

в) Докажите, что существует не более чем одна операция, удовлетворяющая условиям задачи.

г) Докажите, что такая операция существует, и укажите правило, позволяющее по заданным  $a$  и  $b$  вычислять  $a \circ b$ .

**305\*.** а) На хордах  $AB$  и  $A'B'$  окружности выбрано по точке  $C$  и  $C'$  так, что три прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  пересекаются в одной точке  $P$ . Введем обозначения:  $AP \cdot A'P = t$ ,  $AC \cdot CB = s$ ,  $A'C' \cdot C'B' = s'$ ,  $CP = q$ ,  $C'P = q'$ . Докажите, что (при  $q \neq 0$ )

$$\sqrt{\frac{s'}{s}} = \frac{q'}{q} = \frac{s' + q'^2}{t} = \frac{t}{s + q^2}.$$

б) Через точку  $P$ , не лежащую на данной сфере, и каждую точку некоторой окружности  $\sigma$ , лежащей на этой сфере, проведены прямые. Докажите, что вторые точки пересечения проведенных прямых с данной сферой также лежат на некоторой окружности  $\sigma'$ .

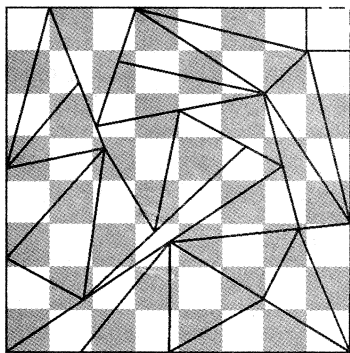


Рис. 59

*Замечание.* Одно из решений задачи б) можно получить, используя задачу а), поэтому мы и объединили их под одним номером. Подумайте, однако, как решить задачу б) другим способом.

**306.** Из шахматной доски  $8 \times 8$  удалена одна угловая клетка  $1 \times 1$  (рис.59). На какое наименьшее число равновеликих треугольников (одинаковых по площади) можно разрезать оставшуюся часть доски?



**307.** Плоскость разбита на одинаковые шестиугольные комнаты (рис.60). В некоторых стенах проделаны двери так, что для любой вершины, в которой сходятся три стены (стороны шестиугольников), двери имеются ровно в двух стенах. Докажите, что любой замкнутый путь по такому лабиринту проходит через четное число дверей.

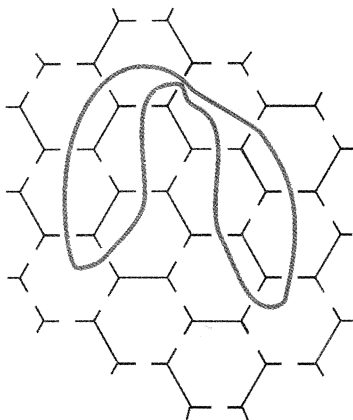


Рис. 60

**308.** Если при любом  $x$  справедливо неравенство

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots$$

$$+ \dots + a_n \cos nx \geq -1,$$

то для чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  выполнено неравенство

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n.$$

Докажите это утверждение: а) для  $n = 2$ ; б) для  $n = 3$ ; в) для любого натурального  $n$ .

**309.** а) При каких  $n$  многочлен  $x^{2n} + x^n + 1$  делится на  $x^2 + x + 1$ ?

б) При каких  $n$  число  $10 \underbrace{00\dots00}_n \underbrace{01}_n$  делится на 37?

**310.** Докажите, что среди  $n$ -значных чисел найдется более  $8^n$  таких, в десятичной записи которых никакая группа цифр (в частности, никакая цифра) не встречается два раза подряд.

**311.** Из одной бактерии получилось 1000 бактерий следующим образом: вначале бактерия разделилась на две, затем одна из двух получившихся бактерий разделилась на две, затем одна из трех получившихся бактерий разделилась на две и так далее. Докажите, что в некоторый момент существовала такая бактерия, число потомков которой среди 1000 бактерий, получившихся в конце, заключено между 334 и 667.

**312.** В параллелограмм  $P_1$  вписан параллелограмм  $P_2$ , в который в свою очередь вписан параллелограмм  $P_3$ , причем стороны  $P_3$  параллельны сторонам  $P_1$ . Докажите, что хотя бы одна сторона параллелограмма  $P_3$  по длине не меньше половины параллельной ей стороны  $P_1$ .

**313.** Дан угол с вершиной  $O$ . Рассмотрим множество четвер-

тых вершин  $M$  параллелограммов  $ONML$ , вершины  $N$  и  $L$  которых лежат на сторонах данного угла, а площадь равна постоянной величине  $k$ . (Это множество называется *гиперболой*.) Докажите, что на биссектрисе этого угла и на ее продолжении найдутся такие точки  $F_1$  и  $F_2$  (где  $F_1O = OF_2$ ), для которых разность расстояний  $F_1M - F_2M$  не зависит от точки  $M$ .

**314.** Среди всех 9-значных чисел, в десятичной записи которых нет цифры 0, найдите такое, для которого разность между самим числом и произведением его цифр: а) наименьшая; б) наибольшая. Каков будет ответ для  $n$ -значных чисел при любом  $n$ ?

**315.** На каждом ребре выпуклого многогранника поставлена стрелка так, что в каждую вершину многогранника входит и из каждой вершины выходит хотя бы одна стрелка. Докажите, что существуют по крайней мере две грани многогранника, каждую из которых можно обойти по периметру, двигаясь в соответствии с направлениями стрелок на ее сторонах.

**316.** а) Докажите, что сумма квадратов  $k$  последовательных натуральных чисел не может быть квадратом целого числа, если  $k$  равно 3, 5, 7 или 9.

б) Придумайте 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых есть квадрат целого числа.

**317\*.** На некоторой планете каждая страна граничит не более чем с 7 другими. В каждой стране имеется запас золота. Требуется распределить золото так, чтобы каждые две страны, граничащие друг с другом, отличались по количеству золота не более чем в 13 раз. Докажите, что распределение золота можно организовать так, чтобы каждая страна лишилась не более половины имевшегося у него золота.

**318.** В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AD$  и  $CE$ . Докажите, что  $CE \cdot AB = AD \cdot BC$  тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из двух условий: 1)  $AB = BC$ ; 2)  $\angle ABC = 60^\circ$ .

**319.** На плоскости заданы окружность  $\gamma$  и точка  $P$  внутри нее. Рассмотрим множество тетраэдров  $ABCD$ , у которых все четыре грани равны, причем треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\gamma$  так, что его медианы пересекаются в точке  $P$ .

а) При каком положении точки  $P$  внутри  $\gamma$  такие тетраэдры существуют?

б) Докажите, что вершины  $D$  таких тетраэдров расположены в одной из двух фиксированных точек пространства (симметричных относительно данной плоскости).

**320.** Какие выпуклые  $n$ -угольники можно разбить на треу-

гольники так, чтобы никакие два из треугольников разбиения не имели общих (полностью совпадающих) сторон? (На рисунке 61 показано, что треугольник так разбить можно.)

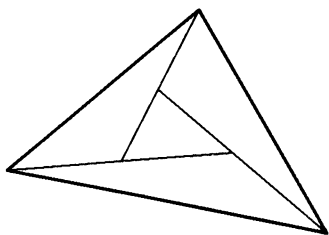


Рис. 61

**321.** Имеется прямоугольный стол площадью 1. Докажите, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать систему прямоугольных салфеток,

покрывающих этот стол (края салфеток параллельны краям стола), такую, что любая ее подсистема, состоящая из неперекрывающихся салфеток, имеет площадь, меньшую  $\varepsilon$ .

**322.** а) Фигура, состоящая более чем из одной точки, является пересечением  $N$  кругов. Докажите, что границу этой фигуры можно представить в виде объединения  $2N - 2$  дуг окружностей.

б) В алфавите  $N$  букв. Несколько букв выписаны по окружности так, что никакая буква не встречается два раза подряд и для любых двух различных букв  $a, b$  можно провести прямую так, что все буквы  $a$  будут по одну сторону от прямой, а буквы  $b$  — по другую (рис. 62). Докажите, что выписано не более  $2N - 2$  букв.

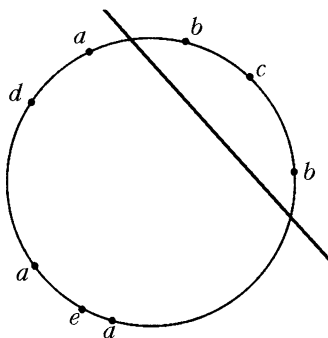


Рис. 62

**323.** Докажите, что любую

функцию, определенную на всей числовой прямой, можно представить в виде суммы двух функций, график каждой из которых имеет центр симметрии.

**324.** Имеется несколько кучек камней. Двое играют в игру, ход которой состоит в том, что игрок разбивает каждую кучку, состоящую более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Ходы делаются поочередно, пока во всех кучках не останется по одному камню. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. Как должен играть начинающий, если сначала в каждой кучке было от 80 до 120 камней?

**325.** В числовом треугольнике верхнее число равно 1 и крайние числа в каждой строке — тоже 1, а каждое из остальных чисел не меньше суммы двух чисел, стоящих над ним (в частности, этому условию удовлетворяет «треугольник Паска-

				1						
			1		1					
				1		2		1		
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5	1	
1		6		15		20		15	6	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Рис. 63

хордой, вписан квадрат так, что две соседние вершины этого квадрата лежат на дуге, две другие – на хорде (рис.64). Чему равняется разность длин сторон этих квадратов?

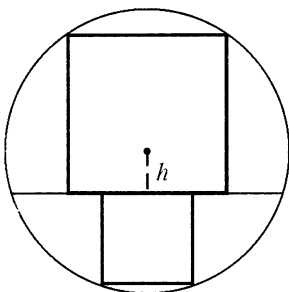


Рис. 64

ля», изображенный на рисунке 63). Пусть натуральное число  $a$ , большее 1, встречается в этом треугольнике  $k$  раз. Докажите, что  $2^k < a^2$ .

**326.** Хорда окружности удалена от центра на расстояние  $h$ . В каждый из сегментов, стягиваемых

**327.** В компании  $N$  человек. Каждому из них нравится ровно  $k$  людей из этой компании. При каком наименьшем  $k$  можно утверждать, что обязательно найдутся два человека из этой компании, которые нравятся друг другу?

**328.** По правильному тетраэдру ползают муха и два паука. Муха ползает только по ребрам, а пауки – по всей поверхности. Максимальная

скорость мухи в 2 раза больше максимальной скорости пауков.

а) Докажите, что при любом начальном расположении пауки могут поймать муху.

б) Верно ли это, если максимальная скорость мухи более чем в 2 раза превосходит максимальную скорость пауков?

в) Как изменится ответ, если разрешить паукам ползать только по ребрам тетраэдра; по всему объему тетраэдра?

**329.** Выпуклый  $n$ -угольник помещен в квадрат со стороной 1. Докажите, что найдутся три вершины  $A, B, C$  этого  $n$ -угольника такие, что площадь треугольника  $ABC$  меньше  $8/n^2$ .

**330.** На плоскости расположены два выпуклых многоугольника  $M_0$  и  $M_1$ . Обозначим через  $M$  множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого принадлежит  $M_0$ , а второй –  $M_1$ . Докажите, что  $M$  – выпуклый многоугольник.

а) Сколько сторон может иметь  $M$ , если  $M_0$  имеет их  $n_0$ , а  $M_1 - n_1$ ?

б) Каков может быть периметр  $M$ , если периметр  $M_0$  равен  $P_0$ , а  $M_1 - P_1$ ?

в) Какова может быть площадь  $M$ , если площадь  $M_0$  равна  $S_0$ , а площадь  $M_1 - S_1$ ?

**331.** а) Треугольник  $A_1B_1C_1$  получился из треугольника  $ABC$  поворотом вокруг центра описанной окружности на некоторый угол, меньший  $180^\circ$ . Докажите, что точки пересечения соответствующих прямых –  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $CA$  и  $C_1A_1$  – являются вершинами треугольника, подобного треугольнику  $ABC$ .

б) Четырехугольник  $A_1B_1C_1D_1$  получился из четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность с центром  $O$ , поворотом вокруг центра  $O$  на некоторый угол, меньший  $180^\circ$ . Докажите, что точки пересечения соответствующих прямых –  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $CD$  и  $C_1D_1$ ,  $DA$  и  $D_1A_1$  – являются вершинами параллелограмма.

**332.** Можно ли составить куб размером  $k \times k \times k$  из белых и черных кубиков  $1 \times 1 \times 1$  так, чтобы для каждого кубика ровно два из его соседей имели тот же цвет, что и он сам? (Два кубика считаются соседними, если они имеют общую грань.)

**333.** Три мухи ползают по сторонам треугольника  $ABC$  так, что центр тяжести образуемого треугольника остается на одном месте. Докажите, что он совпадает с центром тяжести треугольника  $ABC$ , если известно, что одна из мух проползла по всей границе треугольника. (Центром тяжести треугольника называется точка пересечения его медиан.)

**334.** Дан многочлен  $P(x)$  с: а) натуральными коэффициентами; б) целыми коэффициентами. Для каждого натурального числа  $n$  через  $a_n$  обозначим сумму цифр в десятичной записи числа  $P(n)$ . Докажите, что найдется число, которое встречается в последовательности  $a_1, a_2, a_3, \dots$  бесконечное число раз.

**335\*.** а) В квадрате  $7 \times 7$  клеток отмечены центры  $k$  клеток. При этом никакие четыре отмеченные точки не являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. При каком наибольшем  $k$  это возможно?

б) Решите ту же задачу для квадрата  $13 \times 13$  клеток.

**336.** В плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, которая имеет общую точку с каждым из этих многоугольников.

**337.** Дан равносторонний треугольник  $ABC$  со стороной 1. Первый игрок выбирает точку  $X$  на стороне  $AB$ , второй –

точку  $Y$  на стороне  $BC$ , затем первый выбирают точку  $Z$  на стороне  $AC$ .

а) Цель первого игрока – получить треугольник  $XYZ$  наибольшей площади, второго – наименьшей площади. Какую наибольшую площадь может обеспечить первый?

б) Цель первого игрока – получить треугольник  $XYZ$  наименьшего периметра, второго – наибольшего периметра. Какой наименьший периметр может обеспечить первый?

**338.** На доске написаны несколько нулей, единиц и двоек. Разрешается стереть две неравные цифры и вместо них написать одну цифру, отличную от стертых (2 вместо 0 и 1, 1 вместо 0 и 2, 0 вместо 1 и 2). Докажите, что если в результате нескольких таких операций на доске останется одна-единственная цифра, то она не зависит от порядка, в котором производились стирания.

**339.** Дана горизонтальная полоса на плоскости, края которой – параллельные прямые, и  $n$  прямых, пересекающих эту полосу. Каждые две из этих  $n$  прямых пересекаются внутри полосы и никакие три не проходят через одну точку. Рассмотрим все пути, начинающиеся на нижней кромке полосы, идущие по данным прямым и заканчивающиеся на верхней кромке, обладающие следующим свойством: идя по такому пути, мы все время поднимаемся вверх; дойдя до точки пересечения прямых, мы обязаны перейти на другую прямую. Докажите, что среди таких путей:

а) есть путь, состоящий не менее чем из  $n$  отрезков;

б) есть путь, проходящий не более чем по  $\frac{n}{2} + 1$  прямым;

в) есть путь, проходящий по всем  $n$  прямым.

**340\*.** В каждую клетку прямоугольной таблицы записано вещественное число. Некоторая клетка таблицы называется ее седловой клеткой, если стоящее в ней число не меньше остальных чисел в своем столбце и не больше остальных чисел в своей строке.

а) Пусть про таблицу  $T$  известно, что любая таблица  $2 \times 2$ , получающаяся в пересечении двух строк и двух столбцов таблицы  $T$ , имеет седловую клетку. Докажите, что тогда таблица  $T$  также имеет седловую клетку.

б) Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$  – произвольные числа,  $p_1, p_2, \dots, p_m, q_1, q_2, \dots, q_n$  – положительные числа. Докажите, что таблица  $m \times n$ , на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца которой стоит число  $\frac{a_i + b_j}{p_i + q_j}$ , имеет седловую клетку.

*Замечание.* Одно из решений задачи б) можно получить, используя задачу а). Подумайте, однако, как можно решить эту задачу другим способом.

**341.** В чемпионате мира участвуют 20 команд. Среди них  $k$  европейских команд, результаты встреч между которыми на чемпионате мира идут в зачет чемпионата Европы. Чемпионат проводится в один круг. При каком наибольшем  $k$  может оказаться, что европейская команда, набравшая строго наибольшее количество очков в чемпионате Европы, наберет строго наименьшее количество очков в чемпионате мира, если это: а) чемпионат по хоккею (допускаются ничьи); б) чемпионат по волейболу (ничьих не бывает)? Какими будут ответы на эти вопросы, если команд не 20, а  $n$ ?

**342.** а) Докажите, что из цифр 1 и 2 можно составить  $2^{n+1}$  чисел, каждое из которых  $2^n$ -значно и каждые два из которых различаются не менее чем в  $2^{n-1}$  разрядах.

б) Докажите, что больше чем  $2^{n+1}$  таких  $2^n$ -значных чисел составить нельзя.

**343.** В некотором государстве города соединены дорогами. Длина любой дороги меньше 500 км, и из любого города в любой другой можно попасть, проехав по дорогам менее 500 км. Когда одну дорогу закрыли на ремонт, выяснилось, что из любого города можно проехать в любой другой по оставшимся дорогам. Докажите, что это можно сделать, проехав не более 1500 км.

**344.** На шахматной доске отмечены центры всех 64 полей. Можно ли провести на доске 13 прямых так, чтобы в каждой из частей, на которые эти прямые делят доску, оказалось не более одной отмеченной точки? (Прямые не должны проходить через центры полей; рис.65).

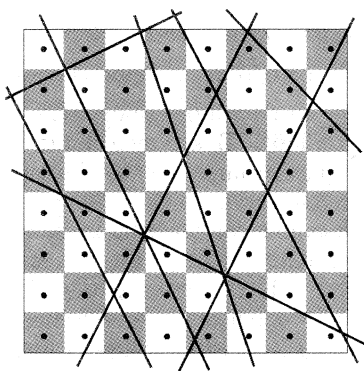


Рис. 65

**345.** В последовательности 197523 ... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырех цифр. Встретятся ли в этой последовательности подряд:

- а) четыре цифры 1 2 3 4;
- б) вторично цифры 1 9 7 5;
- в) цифры 8 1 9 7?

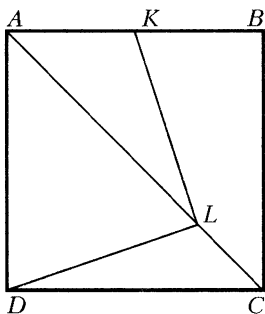


Рис. 66

**346.** Точка  $K$  – середина стороны  $AB$  квадрата  $ABCD$ , а точка  $L$  делит диагональ  $AC$  в отношении 3:1 (рис. 66). Докажите, что угол  $KLD$  – прямой.

**347.** Двое играют в такую игру. Первый загадывает два числа от 1 до 25, а второй должен их угадать. Он может назвать любые два числа от 1 до 25 и узнать у первого, сколько из названных им чисел – 0, 1 или 2 – совпадают с загаданными. За какое минимальное число вопросов он сможет

наверняка определить загаданные числа?

**348.** В таблицу  $10 \times 10$  записаны числа от 1 до 100 по порядку. Затем в каждой строке и в каждом столбце ровно у половины чисел поставлен знак «минус». Докажите, что в получившейся таблице сумма всех чисел равна нулю.

**349.** Какому условию должны удовлетворять длины сторон треугольника, чтобы треугольник, составленный из: а) высот; б) медиан; в) биссектрис данного треугольника, был подобен данному?

**350.** С белого углового поля шахматной доски размером  $n \times m$  ( $n$  и  $m$  больше 1) начинает двигаться слон. Дойдя до края доски, слон поворачивает под прямым углом (рис. 67). Попад в угол, он останавливается.

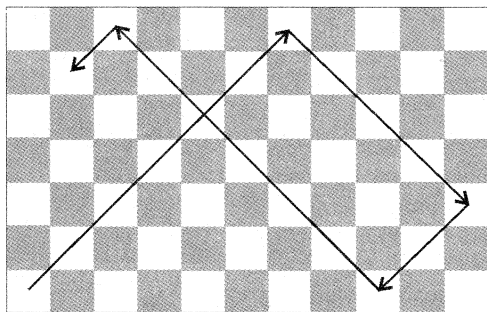


Рис. 67

а) При каких  $n$  и  $m$  слон обойдет все белые поля доски?

б) Сколько всего полей он обойдет на доске  $n \times m$ ?

Рассмотрите в качестве примеров доски размерами  $10 \times 15$ ,  $10 \times 25$ ,  $15 \times 25$ .



**351.** Восстановите треугольник, если на плоскости отмечены три точки:  $O$  – центр описанной окружности,  $P$  – центр тяжести и  $H$  – основание одной из высот этого треугольника.

**352.** Пусть  $n$  – целое число, для которого  $n < (45 + \sqrt{1975})^{30} < n + 1$ . Докажите, что  $n$  нечетно.

**353.** Пусть  $ABCD$  – произвольный тетраэдр. Докажите, что:

а) сумма двугранных углов тетраэдра, ребрами которых являются  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$ , меньше  $2\pi$ ;

б) сумма всех двугранных углов тетраэдра больше  $2\pi$ , но меньше  $3\pi$ ;

в) сумма косинусов всех двугранных углов тетраэдра положительна и не превосходит 2, причем эта сумма равна 2 в том и только в том случае, когда все грани тетраэдра – равные треугольники;

г) если  $AB + CD = BC + DA$ , то сумма двух двугранных углов, ребрами которых являются  $AB$  и  $CD$ , равна сумме двух двугранных углов тетраэдра, ребрами которых являются  $BC$  и  $DA$ .

**354.** Можно ли расставить числа  $1, 2, 3, \dots, 4n + 2$  в вершинах и серединах сторон правильного  $(2n + 1)$ -угольника так, чтобы сумма трех чисел, стоящих в концах и середине каждой стороны, была для всех сторон одной и той же?

Рассмотрите в качестве примеров случаи  $n = 3, n = 8$ .

**355.**  $N$  ребят перекидываются  $N$  мячами. В начале игры каждый из них бросает свой мяч кому-нибудь из своих товарищей и сам ловит брошенный кем-нибудь мяч (он может подбросить и поймать свой собственный мяч) так, что снова у всех оказывается по мячу. Затем ребята снова бросают мячи тем же, кому они бросали их в первый раз, и так далее. Игра останавливается, когда все мячи вернутся к своим владельцам (чтобы мячи не перепутались, будем считать их разноцветными).

Докажите, что:

а) к каждому из участников мяч вернется впервые не более чем через  $N$  бросаний;

б) игра обязательно закончится;

в) для 5, 10 и 15 участников она может закончиться самое большее через 6, 30 и 105 бросаний соответственно (а какова максимальная возможная длительность игры для  $N = 7, N = 8, N = 20$ ?);

г) длительность игры всегда является делителем числа  $N! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot N$ ;

д) длительность игры не может превышать  $3^{N/3}$ .

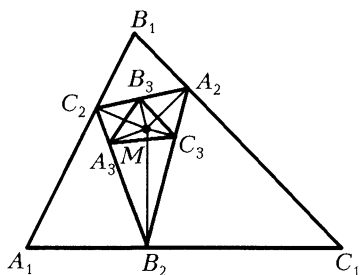


Рис. 68

полученной последовательности треугольников  $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$  треугольник  $A_{3n+1}B_{3n+1}C_{3n+1}$  подобен треугольнику  $A_1B_1C_1$ .

**357.** Докажите, что если

$$x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x},$$

то  $x = y = z$  или  $x^2y^2z^2 = 1$ .

**358.** Докажите, что у любого  $n$ -угольника ( $n \geq 4$ ) есть хотя бы одна диагональ, целиком лежащая внутри  $n$ -угольника, и выясните, какое наименьшее число таких диагоналей может иметь  $n$ -угольник (при каждом  $n$ ).

**359<sup>+</sup>.** Маленький шарик движется внутри бильярда, имеющего форму эллипса с фокусами  $A$  и  $B$ , упруго отражаясь от его бортов, по ломаной  $P_1P_2P_3P_4 \dots$  ( $P_1, P_2, \dots$  — точки эллипса). Докажите, что если звено  $P_1P_2$  не пересекает отрезок  $AB$ , то:

а) все следующие звенья  $P_2P_3, P_3P_4, \dots$  не пересекают отрезок  $AB$ ;

б) все эти звенья касаются одного и того же эллипса.

(Подумайте, как построить этот эллипс.)

**360.** Про последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  известно, что  $|a_1| = 1$  и  $|a_{k+1}| = |a_k + 1|$  при каждом  $k = 1, 2, \dots$  Найдите наименьшее возможное значение суммы  $|a_1 + a_2 + \dots + a_n|$ , если: а)  $n = 1975$ ; б)  $n = 1976$ .

## 1976 ГОД

**361.** Двое играют в следующую игру. На клетчатой бумаге выделяется прямоугольник  $m \times n$  клеток. Каждый по очереди вычеркивает все клетки какого-нибудь горизонтального или вертикального ряда, в котором еще есть невычеркнутые клетки. Выигрывает тот, кто вычеркивает последние клетки. Кто

может обеспечить выигрыш: начинающий или его партнер? (Ответ, конечно, зависит от  $m$  и  $n$ .)

**362.** Поделим каждую сторону выпуклого четырехугольника  $ABCD$  на три равные части и соединим отрезками соответствующие точки на противоположных сторонах (рис. 69). Докажите, что площадь «среднего» четырехугольника в 9 раз меньше площади четырехугольника  $ABCD$ .

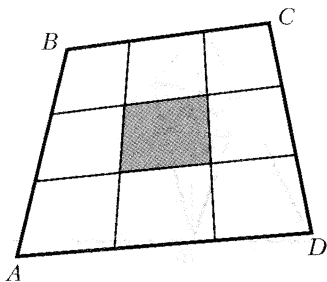


Рис. 69

**363.** Две параболы с параллельными осями пересекаются в точках  $A_0$  и  $B_0$ . На первой из них взяты точки  $A_1, \dots, A_{2n}$ , на второй — точки  $B_1, \dots, B_{2n}$  так, что  $A_0A_1 \parallel B_0B_1$ ,  $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ , ...,  $A_{2n-1}A_{2n} \parallel B_{2n-1}B_{2n}$ . Докажите, что  $A_0B_{2n} \parallel B_0A_{2n}$ .

**364.** Из 16 космонавтов нужно выбрать 4 — экипаж космического корабля. Тренировки проводятся с 4-мя экипажами по 4 человека в каждом. Можно ли составить расписание тренировок таким образом, чтобы любые два космонавта побывали в одном экипаже ровно один раз?

**365.** а) Сумма нескольких чисел равна единице. Может ли сумма их кубов быть больше единицы?

б) Тот же вопрос для чисел, каждое из которых меньше единицы.

в) Может ли случиться так, что ряд  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  сходится, а ряд  $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots$  нет? (Напомним, что ряд  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$  называется сходящимся, если последовательность  $S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$  имеет предел.)

**366.** Можно ли расположить на плоскости несколько треугольников так, чтобы две вершины каждого из них лежали на сторонах (но не в вершинах) других треугольников?

**367.** Может ли произведение: а) трех; б) четырех последовательных натуральных чисел равняться некоторой степени некоторого натурального числа (квадрату, кубу и так далее)?

**368.** Докажите, что пересечение трех прямых круговых цилиндров с радиусами 1, оси которых попарно взаимно перпендикулярны (но не обязательно пересекаются), содержится в некотором шаре радиусом  $\sqrt{3/2}$ .

**369.** Дан остроугольный треугольник  $ABC$ ,  $H$  — точка пересечения его высот,  $\gamma$  — окружность с центром  $H$ , лежащая внутри

этого треугольника. Постройте треугольник  $A_1B_1C_1$ , описанный около окружности  $\gamma$  и вписанный в треугольник  $ABC$  (так, что  $A_1$  лежит на отрезке  $BC$ ,  $B_1$  — на  $AC$ ,  $C_1$  — на  $AB$ ).

**370\*.** Пусть  $a, b, c$  — тройка положительных чисел. Образует из нее новую тройку:  $|a - b|, |b - c|, |c - a|$ , затем из этой тройки по тому же правилу образуем следующую и так далее. Обязательно ли среди полученных таким образом чисел встретится 0, если исходные числа: а) целые; б) действительные?

**371.** В каждой клетке шахматной доски написано целое число от 1 до 64, причем в разных клетках — разные числа. За один вопрос можно, указав любую совокупность полей, узнать совокупность (множество) чисел, стоящих на этих полях. За какое наименьшее число вопросов можно узнать число в каждой клетке?

**372.** Дан треугольник  $ABC$ . Докажите, что условие  $\angle ACB \geq 120^\circ$  необходимо и достаточно, чтобы для любой точки  $P$  плоскости выполнялось неравенство

$$AP + BP + CP \geq AC + BC.$$

**373.** а) Все натуральные числа (записанные в десятичной системе) разбиты на два класса. Докажите, что любую бесконечную десятичную дробь можно разрезать на такие конечные куски, чтобы все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежали одному классу.

б) Та же задача, но натуральные числа разбиты не на два, а на несколько классов.

**374.** Пусть  $a, b$  и  $c$  — положительные числа,  $a > c$  и  $b > c$ . Докажите неравенство

$$\sqrt{c(a - c)} + \sqrt{c(b - c)} \leq \sqrt{ab}.$$

**375.** Внутри выпуклого многогранника объемом 1 отмечены  $3(2^n - 1)$  точки. Докажите, что из него можно вырезать выпуклый многогранник объемом  $(1/2)^n$ , не содержащий внутри себя ни одной отмеченной точки.

**376.** а) В ряд расположены 30 клеток. На самой правой клетке стоит белая фишка, на самой левой — черная. Каждый из двух играющих по очереди передвигает свою фишку на одно поле — вперед или назад. (Пропускать ход нельзя.) Проигравшим считается тот, у кого нет хода. Кто выигрывает: начинающий или его партнер?

б) Решите задачу, заменив в условии 30 на  $N$ .

**377.** Дан треугольник  $ABC$ . Найдите на стороне  $AC$  такую точку  $D$ , чтобы периметр треугольника  $ABD$  равнялся длине стороны  $BC$ .

**378\*.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде:

а)  $x^3 + y^3 + z^3$ , где  $x, y, z$  — целые числа;

б)  $x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — целые числа.

в) Докажите, что любое рациональное число можно представить в виде  $x^3 + y^3 + z^3$ , где  $x, y, z$  — рациональные числа.

**379\*.** На каждом из нескольких кусков бумаги произвольной формы поставлена клякса (произвольной формы). Назовем промокашку подходящей для данного куска, если ее можно разместить внутри этого куска так, что она закрывает кляксу. Пусть набор промокашек, имеющих форму кругов разных радиусов, обладает таким свойством: для произвольных двух данных кусков найдется промокашка, подходящая для каждого из них. Докажите, что тогда в этом наборе найдется одна промокашка, подходящая для всех кусков бумаги.

**380.** а) На плоскости дана выпуклая фигура и внутри нее — точка  $O$ . К каждой прямой  $l$ , проходящей через точку  $O$ , проводится перпендикуляр в точке  $O$ , и на нем по обе стороны от точки  $O$  откладываются два равных отрезка, длины которых равны длине отрезка, получающегося при пересечении данной фигуры с прямой  $l$ . Объединение всех этих отрезков — новая фигура с центром симметрии  $O$ . Будет ли полученная фигура выпуклой?

б) В пространстве дано выпуклое центрально-симметричное тело с центром  $O$ . К каждой плоскости  $\alpha$ , проходящей через точку  $O$ , проводится перпендикуляр в точке  $O$ , и на нем по обе стороны от этой точки откладываются два отрезка, длины которых равны площади сечения данного тела плоскостью  $\alpha$ . Объединение всех этих отрезков — новое тело с тем же центром симметрии  $O$ . Докажите, что полученное тело тоже выпуклое.

**381.** Шесть активистов класса образовали 30 различных комиссий. Каждая две комиссии отличаются составом, но обязательно «пересекаются», т.е. имеют общего члена. Докажите, что можно образовать еще одну комиссию, пересекающуюся с каждой из этих 30 комиссий.

**382.** Дан полином  $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$  с целыми коэффициентами и натуральные числа  $k$  и  $p$ . Докажите, что если ни одно из чисел  $f(k), f(k+1), \dots, f(k+p)$  не делится на  $p+1$ , то уравнение  $f(x) = 0$  не имеет рациональных корней.

**383.** Пусть  $a$  и  $b$  — два натуральных числа. Докажите, что если  $ab$  четно, то найдутся такие натуральные числа  $c$  и  $d$ , что

$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ , а если  $ab$  нечетно, то таких  $c$  и  $d$  найти нельзя.

**384.** Два одинаково ориентированных квадрата  $OABC$  и  $OA_1B_1C_1$  имеют общую вершину  $O$ . Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  проходят через одну точку.

**385<sup>+</sup>.** На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник с вершинами в узлах (в углах клеток). Выберем какую-нибудь вершину многоугольника  $F$  и обозначим через  $nF$  многоугольник, полученный из  $F$  растяжением в  $n$  раз ( $n$  – натуральное число) относительно этой вершины (рис.70). Будем обозначать через  $N(nF)$  число узлов, которые лежат внутри и на границе  $nF$ , и через  $M(nF)$  будем обозначать число узлов,

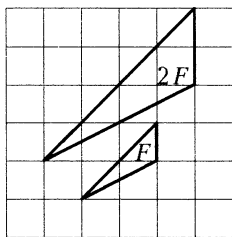


Рис. 70

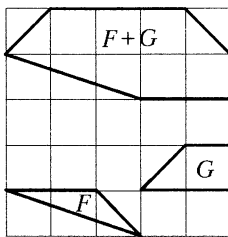


Рис. 71

которые лежат на границе  $nF$ . Через  $S(F)$  обозначим площадь  $F$  (площадь одной клетки равна 1). Докажите, что:

а)  $N(nF)$  является многочленом от  $n$ ;

б)  $2S(F) = N(2F) - 2N(F) + 1$ ;

в)  $S(F) = N(F) - M(F)/2 + 1$ ;

г) для любых двух выпуклых многоугольников  $F$  и  $G$  с вершинами в узлах  $N(nF + mG)$  является многочленом от  $n$  и  $m$  (имеется в виду сумма Минковского; рис.71).

В трехмерном пространстве задан выпуклый многогранник  $F$ , все вершины которого являются целыми точками (точка называется целой, если все три ее координаты являются целыми числами). Предположим, что начало координат  $O$  является вершиной  $F$ , и обозначим через  $nF$  многогранник, полученный из  $F$  растяжением в  $n$  раз относительно начала координат (каждая точка  $nF$  получается из некоторой точки  $F$  умножением на  $n$ , где  $n$  – натуральное число). Будем обозначать через  $N(nF)$  число целых точек в многограннике  $nF$  и на его границе, а через  $M(nF)$  будем обозначать число целых точек на границе  $nF$ . Через  $V(F)$  обозначим объем многогранника.

д) Докажите, что не существует формулы, которая была бы верна для любого описанного выше многогранника  $F$  и выражала бы  $V(F)$  через  $N(F)$  и  $M(F)$ .

е) Придумайте формулу, которая (для некоторого  $k$ ) выражает  $V(F)$  через  $N(F)$ ,  $N(2F)$ , ...,  $N(kF)$ .

ж) Придумайте формулу, которая выражает  $V(F)$  через  $N(F)$ ,  $N(2F)$ ,  $M(F)$ ,  $M(2F)$ .

з) Докажите формулы, полученные при решении задач е) и ж).

и) Докажите, что  $N(nF)$  является многочленом от  $n$ .

**386.** Квадратная комната разгорожена перегородками, параллельными стенам, на несколько меньших квадратных комнат. Длина стороны каждой комнаты – целое число. Докажите, что сумма длин всех перегородок делится на 4.

**387.** Существует ли такое натуральное число, что если приписать его само к себе, то получится точный квадрат?

**388.** а) На плоскости отмечено конечное число точек. Докажите, что среди них найдется точка, у которой не более трех ближайших (т.е. находящихся на наименьшем от нее расстоянии; таких точек, вообще говоря, может быть несколько).

б) Существует ли на плоскости конечное множество точек, у каждой из которых в этом множестве ровно три ближайших?

**389.** Можно ли бесконечный лист клетчатой бумаги разбить на «доминошки» (каждая доминошка покрывает две клетки) так, чтобы каждая прямая, идущая по линии сетки, разрежала пополам лишь конечное число доминошек?

**390\*.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$ , для которых сумма цифр числа  $2^n$  больше суммы цифр числа  $2^{n+1}$ .

**391.** а) В последовательности  $x_0, x_1, x_2, \dots$  числа  $x_0$  и  $x_1$  – натуральные и меньше 1000, а каждое из остальных чисел равно модулю разности двух предыдущих. Докажите, что одно из чисел  $x_1, \dots, x_{1500}$  равно 0.

б) В последовательности  $x_0, x_1, x_2, \dots$  числа  $x_0$  и  $x_1$  – натуральные и меньше 10000, а каждое из чисел  $x_2, x_3, \dots$  равно наименьшей из абсолютных величин разностей двух каких-то предыдущих чисел. Докажите, что  $x_{20} = 0$ .

**392.** По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

**393.** Найдите сумму  $\varphi(0) + \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \varphi\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \varphi(1)$ , если  $\varphi(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ .

**394.** а) На плоскости даны векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ , сумма которых равна  $\bar{0}$ . Докажите неравенство

$$|\bar{a}| + |\bar{b}| + |\bar{c}| + |\bar{d}| \geq |\bar{a} + \bar{d}| + |\bar{b} + \bar{d}| + |\bar{c} + \bar{d}|.$$

Докажите аналогичное неравенство: б) для четырех чисел, в) для четырех векторов в трехмерном пространстве, сумма которых равна нулю.

**395\*.** В вершинах правильного  $n$ -угольника с центром в точке  $O$  расставлены числа  $+1$  и  $-1$ . За один шаг разрешается изменить знак у всех чисел, стоящих в вершинах какого-либо правильного  $k$ -угольника с центром  $O$  (при этом мы допускаем и 2-угольники, понимая под 2-угольником отрезок с серединой в точке  $O$ ).

Докажите, что в случаях а), б), в) существует такое первоначальное расположение  $+1$  и  $-1$ , что из него ни за какое число шагов нельзя получить набор из одних  $+1$ : а)  $n = 15$ ; б)  $n = 30$ ; в)  $n$  — любое целое число больше 2.

г) Попробуйте выяснить для произвольного  $n$ , сколько существует различных расстановок  $+1$  и  $-1$  таких, что никакую из них нельзя получить ни из какой другой за несколько шагов. Докажите, например, что для  $n = 2100$  существует  $2^{480}$  таких расстановок.

**396.** Треугольник, все стороны которого больше 1 см, назовем «большим». Дан правильный треугольник  $ABC$  со стороной 5 см. Докажите, что:

а) из треугольника  $ABC$  можно вырезать 1000 «больших» треугольников;

б) треугольник  $ABC$  можно разрезать на 1000 «больших» треугольников;

в) треугольник  $ABC$  можно триангулировать на 1000 «больших» треугольников, т.е. разбить его так, чтобы любые два треугольника либо не имели общих точек, либо имели только общую вершину, либо имели общую сторону;

г) решите пункты б) и в) для правильного треугольника со стороной 3 см.

**397.** На плоскости даны три окружности одного и того же радиуса.

а) Докажите, что если все окружности пересекаются в одной



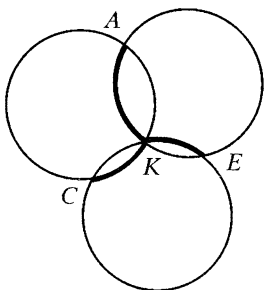


Рис. 72

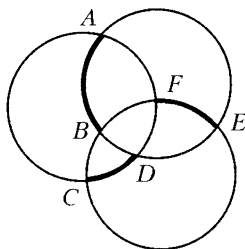


Рис. 73

точке, как показано на рисунке 72, то сумма отмеченных дуг  $AK$ ,  $CK$ ,  $EK$  равна  $180^\circ$ .

б) Докажите, что если окружности расположены так, как показано на рисунке 73, то сумма дуг  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  равна  $180^\circ$ .

**398.** На окружности расположены  $n$  действительных чисел ( $n \geq 3$ ), сумма которых равна нулю. Одно из этих чисел равно 1.

а) Докажите, что есть два соседних числа, различающихся не менее чем на  $4/n$ .

б) Докажите, что есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на  $8/n^2$ .

в) Оценку, предложенную в предыдущем пункте, можно улучшить. Попробуйте заменить в ней число 8 каким-нибудь большим числом так, чтобы утверждение этой задачи по-прежнему выполнялось для всех натуральных чисел.

г) Докажите, что для  $n = 30$  на окружности есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на  $2/113$ . Приведите пример набора 30 чисел на окружности, в котором ни одно число не отличается от среднего арифметического двух своих соседей более чем на  $2/113$ .

д) Найдите в этой задаче точную оценку разности между числом и средним арифметическим его соседей для любого  $n$ .

**399\*.** На отрезке длиной 7 можно поставить пять точек (рис.74) так, чтобы для любого  $m = 1, 2, \dots, 7$  нашлись две из этих пяти точек на расстоянии  $m$ . Попробуйте выяснить, какое наименьшее число  $k_n$  точек нужно поставить на отрезке длиной  $n$  так, чтобы для любого  $m = 1, 2, \dots, n$  нашлись две из этих  $k_n$  точек на расстоянии  $m$ .

а) Решите эту задачу для нескольких первых значений  $n$  (нам известно  $k_n$  для  $n \leq 13$ ).

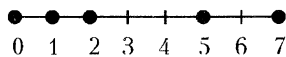


Рис. 74

б) Получите оценки для  $k_n$  для любого  $n$ . Известны оценки  $(\sqrt{8n+1}+1)/2 \leq k_n \leq \sqrt{4n+5}-1$ . Постарайтесь доказать эти неравенства и, если сможете, найдите более точные оценки.

**400\*.** Последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$  назовем универсальной для данного  $N$ , если из нее можно получить вычеркиванием части членов любую последовательность из  $N$  чисел, в которую каждое из чисел  $1, 2, \dots, N$  входит по одному разу.

а) Приведите пример универсальной последовательности из  $N^2$  членов.

б) Приведите пример универсальной последовательности из  $N^2 - N + 1$  членов.

в) Докажите, что любая универсальная последовательность состоит не менее чем из  $\frac{N(N+1)}{2}$  членов.

г) Докажите, что при  $N = 4$  самая короткая универсальная последовательность состоит из 12 членов.

д) Попробуйте найти для данного  $N$  как можно более короткую универсальную последовательность.

**401.** Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  дана точка  $P$  такая, что  $\angle APB = \angle ABC + 60^\circ$ ,  $\angle BPC + \angle BAC = 60^\circ$ ,  $\angle CPA = \angle CBA + 60^\circ$ . Докажите, что точки пересечения продолжений отрезков  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  (за точку  $P$ ) с окружностью, описанной вокруг треугольника  $ABC$ , лежат в вершинах равностороннего треугольника.

**402.** Докажите, что не существует строго возрастающей последовательности целых неотрицательных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , для которых при любых  $n$  и  $m$  выполняется соотношение  $a_{nm} = a_n + a_m$ .

**403.** Докажите, что если в выпуклом многограннике из каждой вершины выходит четное число ребер, то в любом сечении его плоскостью, не проходящей ни через одну из его вершин, получится многоугольник с четным числом сторон.

**404.** На полке стоят первые  $n$  томов энциклопедии. С ними можно проводить следующую операцию: взять любые три рядом стоящих тома и поставить их между любыми двумя томами, а также в начало или в конец ряда, не меняя при этом порядка этих трех томов. Можно ли, применив несколько раз указанную операцию, поставить их в порядке возрастания номеров томов (независимо от первоначальной расстановки томов)?

**405.** На шахматной доске размером  $99 \times 99$  отмечена фигура  $\Phi$  (эти фигуры будут разными в пунктах а), б) и в)). В каждой клетке фигуры  $\Phi$  сидит жук. В какой-то момент жуки взлетели

и сели снова в клетки той же фигуры  $\Phi$ ; при этом в одну клетку могло сесть несколько жуков. После перелета любые два жука, занимавшие соседние клетки, оказались снова в соседних клетках или попали на одну клетку. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону или общую вершину. )

а) Пусть фигура  $\Phi$  – это «центральный крест» (рис.75). Докажите, что в этом случае какой-то жук вернулся на свое место, либо перелетел на соседнюю клетку.

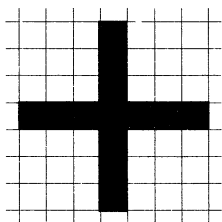


Рис. 75

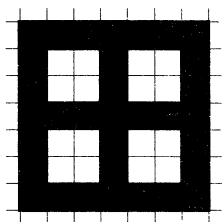


Рис. 76

б) Верно ли это утверждение, если фигура  $\Phi$  – это «оконная рама» (рис.76)?

в) Верно ли это утверждение, если фигура  $\Phi$  – это вся доска?

**406.** Окружность радиусом  $R$  разделена точками  $A_1, A_2, A_3, A_4$  на четыре равные дуги. Докажите, что сумма четвертых степеней расстояний от произвольной точки окружности  $M$  до точек  $A_k$  не зависит от положения точки  $M$ , причем

$$A_1 M^4 + A_2 M^4 + A_3 M^4 + A_4 M^4 = 24R^4.$$

**407.** Даны два натуральных числа  $n$  и  $m$ ,  $n > m$ . Докажите, что  $n$  можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых – делитель числа  $m$ , а другое не имеет с  $m$  ни одного общего делителя, кроме единицы.

**408.** Из 30 равных прямоугольников составлен прямоугольник, подобный исходным. Каким может быть отношение длин сторон этого прямоугольника?

**409.** В строчку подряд написаны 1000 чисел. Под ней пишется вторая строчка по следующему правилу: под каждым числом  $A$  первой строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз  $A$  встречается в первой строчке. Из второй строчки таким же образом получается третья: под каждым числом  $B$  второй строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз  $B$  встречается во второй строчке. Затем из третьей строчки так же строится четвертая, из четвертой – пятая и так далее.

- а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.  
 б) Более того, докажите, что 11-я строка совпадает с 12-й.  
 в) Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10-я строчка не совпадает с 11-й.

**410\*.** На сфере радиусом 1 проведена окружность большого круга, которую мы будем называть экватором. Нам будет удобно использовать и другие географические термины: полюс, меридиан, параллель.

а) Зададим на этой сфере функцию  $f$ , ставящую в соответствие каждой точке сферы квадрат расстояния от этой точки до плоскости экватора. Проверьте, что эта функция обладает следующим свойством: если  $M_1, M_2, M_3$  — концы трех взаимно перпендикулярных радиусов сферы, то

$$f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) = 1.$$

Во всех следующих пунктах  $f$  — произвольная неотрицательная функция на сфере, которая обращается в 0 во всех точках экватора и обладает указанным свойством.

б) Пусть  $M$  и  $N$  — точки одного меридиана, расположенные между северным полюсом и экватором. Докажите, что если точка  $M$  дальше от плоскости экватора, чем точка  $N$ , то  $f(M) \geq f(N)$ .

в) Пусть  $M$  и  $N$  — произвольные точки сферы. Докажите, что если точка  $M$  дальше от плоскости экватора, чем  $N$ , то  $f(M) \geq f(N)$ .

г) Докажите, что функция  $f$  совпадает с функцией, описанной в пункте а).

**411.** Три отрезка с концами на сторонах треугольника, параллельные его сторонам, проходят через одну точку и имеют одинаковую длину  $x$  (рис.77). Найдите  $x$ , если длины сторон треугольника равны  $a, b, c$ .

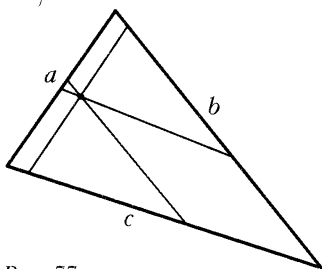


Рис. 77

**412.** В городе на каждую площадь выходит не менее трех улиц. На всех улицах введено одностороннее движение так, что с любой площади можно проехать на любую другую. Докажите, что можно запретить движение по одной из улиц (на участке между двумя

площадями) так, что по-прежнему с любой площади можно будет проехать на любую другую.

**413\*.** Для каких положительных чисел  $a$  верно следующее утверждение: для любой функции  $f$ , определенной на отрезке

$[0; 1]$ , непрерывной в каждой точке этого отрезка и такой, что  $f(0) = f(1) = 0$ , уравнение  $f(x+a) - f(x) = 0$  имеет решение?

а) Выясните сначала этот вопрос для случая  $a = 1/2$ .

б) Докажите, что для  $a = 1/n$ , где  $n$  – натуральное число, сформулированное утверждение верно.

в) Докажите, что для остальных положительных  $a$  оно неверно.

При решении этой задачи может пригодиться такое свойство непрерывных функций: если функция  $g$  определена на отрезке  $[a; b]$ , непрерывна в каждой точке этого отрезка и на концах его принимает значения разных знаков, то между  $a$  и  $b$  найдется точка  $c$ , в которой  $g(c) = 0$ .

**414<sup>+</sup>.** а) Из пяти треугольников, отсекаемых от данного выпуклого пятиугольника, площади четырех равны  $S$ , площадь пятого  $3S/2$ . Найдите площадь  $x$  пятиугольника.

б) Докажите, что если  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$  – площади этих пяти треугольников, то

$$x^2 - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5)x + (S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_4 + S_4S_5 + S_5S_1) = 0.$$

**415.** Какое наибольшее число королей можно расставить на торической шахматной доске  $n \times n$ , чтобы они не били друг друга? Торическая шахматная доска получается из обычной размером  $n \times n$ , у которой верхняя и нижняя горизонтали, а также левая и правая вертикали считаются склеенными. На торической доске с каждого поля король может пойти на восемь соседних полей (рис.78).

**416.** На плоскости даны  $n$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , никакие три из которых не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число отрезков с концами в этих точках можно провести так, чтобы не получилось ни одного треугольника с вершинами в этих точках?

**417.** На поверхности куба с ребром 1 расположена замкнутая ломаная линия. На каждой грани куба находится по крайней мере одно звено ломаной. Докажите, что длина ломаной не меньше  $3\sqrt{2}$ .

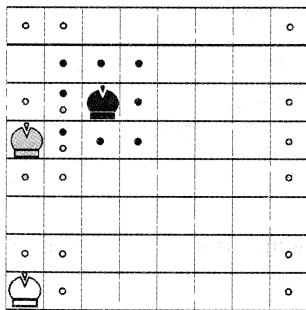


Рис. 78

**418.** Докажите, что для любого натурального  $n \geq 2$  выполняются неравенства

$$n(\sqrt[n]{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + n \left( 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right).$$

**419.** В круге радиусом 16 расположены 650 точек. Докажите, что найдется кольцо с внутренним радиусом 2 и внешним радиусом 3, в котором лежат не менее 10 из данных точек.

**420.** а) Из дроби  $\frac{a}{b}$  разрешается получить любую из трех дробей  $\frac{a-b}{b}$ ,  $\frac{a+b}{b}$ ,  $\frac{b}{a}$ . Можно ли такими преобразованиями из дроби  $\frac{1}{2}$  получить дробь  $\frac{67}{91}$ ?

б) Из пары дробей  $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$  разрешается получить любую из трех пар  $\left(\frac{a+b}{b}, \frac{c+d}{d}\right)$ ,  $\left(\frac{a-b}{b}, \frac{c-d}{d}\right)$ ,  $\left(\frac{b}{a}, \frac{d}{c}\right)$ . Можно ли из пары дробей  $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{7}\right)$  получить следующие пары:  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$ ,  $\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{8}\right)$ ,  $\left(\frac{5}{19}, \frac{13}{50}\right)$ ,  $\left(\frac{39}{50}, \frac{60}{77}\right)$ ? (Здесь мы рассматриваем дробь  $\frac{a}{b}$  просто как пару взаимно простых чисел: допускаются «дроби», у которых в числителе или знаменателе стоят отрицательные числа или 0.)

в) Постарайтесь выяснить, какие вообще дроби (соответственно, пары дробей) можно получить из данных в задачах а) и б).

## 1977 ГОД

**421.** При каких натуральных  $m$  и  $n$  ( $m < n$ ) можно закрасить некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги в черный цвет так, чтобы любой прямоугольник размером  $m \times n$  содержал ровно одну черную клетку?

**422.** Разбейте произвольный треугольник на семь равнобедренных треугольников, из которых три равны между собой.

**423.** Докажите, что для любых действительных  $x$ ,  $y$  и  $z$  выполнено неравенство

$$(x^2 + y^2 - z^2)(x^2 + z^2 - y^2)(y^2 + z^2 - x^2) \leq (x + y - z)^2 (x + z - y)^2 (y + z - x)^2.$$

**424.** Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, содержащая центр окружности, описанной около противоположной грани, и перпендикулярная противоположной грани. Докажите, что эти четыре плоскости пересекаются в одной точке.

**425.** Существует ли такое натуральное  $N$ , что каждое рациональное число между нулем и единицей представляется в виде суммы  $N$  чисел, обратных натуральным?

1	2	3	4			...		$n-1$	$n$
2	3	4			...		$n-1$	$n$	1
3	4			...		$n-1$	$n$	1	2
4			...		$n-1$	$n$	1	2	3
		...		$n-1$	$n$	1		...	
	...		$n-1$	$n$	1		...		
...		$n-1$	$n$	1		...			
$n-2$	$n-1$	$n$	1		...				
$n-1$	$n$	1		...					$n-2$
$n$	1		...					$n-2$	$n-1$

Рис. 79

**426.** Таблица из  $n \times n$  клеток заполнена числами от 1 до  $n$  так, как показано на рисунке 79. При каком  $n$  в ней можно выбрать  $n$  клеток так, чтобы никакие две клетки не принадлежали одной строке или одному столбцу и чтобы все числа в выбранных клетках были разные?

**427. а)** Докажите, что существует нечетное число  $n$ , для которого ни при каком четном  $k$  ни одно из чисел бесконечной последовательности  $k^k + 1$ ,  $k^{k^k} + 1$ ,  $k^{k^{k^k}} + 1$ , ... не делится на  $n$ .

**б)** Докажите, что для каждого натурального  $n$  существует такое натуральное число  $k$ , что каждый из членов бесконечной последовательности  $k + 1$ ,  $k^k + 1$ ,  $k^{k^k} + 1$ ,  $k^{k^{k^k}} + 1$ , ... делится на  $n$ .

**428.** В олимпиаде участвуют  $(m - 1)n + 1$  человек. Докажите, что среди них найдется  $m$  участников, попарно незнакомых между собой, либо найдется один участник, знакомый не менее чем с  $n$  участниками олимпиады. Останется ли верным утверждение задачи, если число участников олимпиады уменьшится на единицу?

**429. а)** Сколько решений имеет уравнение

$$[x] - 1977\{x\} = 1978?$$

(Здесь  $[x]$  — целая часть  $x$ , а  $\{x\} = x - [x]$ .)

**б)** Докажите, что при любых  $p \neq 0$  и  $q$  уравнение

$$[x] + p\{x\} = q$$

имеет  $[|p|]$  или  $[|p|] + 1$  решений.

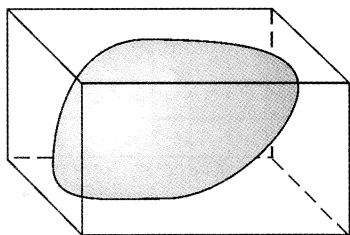


Рис. 80

**430\*.** а) Докажите, что любую выпуклую плоскую фигуру площадью  $S$  можно поместить в прямоугольник площадью  $2S$ .

б) Докажите, что любое выпуклое тело объемом  $V$  можно поместить в ящик, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда объемом  $6V$  (рис. 80).

**431.** В лесу растут деревья цилиндрической формы. Связисту нужно протянуть по лесу провод из точки  $A$  в точку  $B$ , расстояние между которыми равно  $l$ . Докажите, что для этой цели достаточно иметь провод длиной  $1,6 l$ .

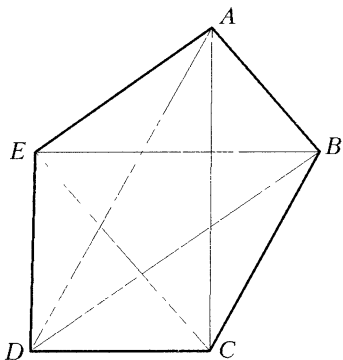


Рис. 81

**432.** Существует ли полный квадрат, сумма цифр которого равна: а) 1977; б) 1978? в) Выясните, какие натуральные числа могут быть суммами цифр квадрата целого числа.

**433.** В выпуклом пятиугольнике  $ABCDE$  сторона  $BC$  параллельна диагонали  $AD$ , сторона  $CD$  — диагонали  $BE$ , сторона  $DE$  — диагонали  $AC$  и сторона  $AE$  — диагонали  $BD$  (рис.81). Докажите, что сторона  $AB$  параллельна диагонали  $CE$ .

**434\*.** Число  $\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n}$  представляется в виде несократимой дроби  $\frac{p_n}{q_n}$ .

а) Докажите, что  $p_n$  — четное число.

б) Докажите, что если  $n > 3$ , то  $p_n$  делится на 8.

в) Докажите, что для любого натурального  $k$  можно указать такое  $n$ , что числа  $p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \dots$  делятся на  $2^k$ .

**435.** В таблице размером  $m \times n$  записаны действительные числа, в каждой клетке по числу. В каждом столбце подчеркнуто  $k$  наибольших чисел ( $k \leq m$ ), в каждой строке —  $l$  наибольших чисел ( $l \leq n$ ). Докажите, что по крайней мере  $kl$  чисел подчеркнуты дважды.



**436.** Даны 20 чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{10}, b_1, b_2, \dots, b_{10}$ . Докажите, что множество из 100 чисел (не обязательно различных)  $a_1 + b_1, a_1 + b_2, \dots, a_{10} + b_{10}$  можно разбить на 10 подмножеств по 10 чисел в каждом так, чтобы сумма чисел в каждом подмножестве была одной и той же.

**437.** Докажите, что нечетное число, являющееся произведением  $n$  различных простых множителей, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно  $2^{n-1}$  различными способами.

**438.** В данный сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей (рис.82). Для каждой пары окружностей

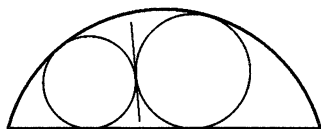


Рис. 82

через точку касания проводится касающаяся их прямая. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

**439. а)** Докажите, что уравнение

$$ax^k + bx^l + cx^m = 1$$

(где  $a, b, c$  — действительные,  $k, l, m$  — натуральные числа) имеет не более трех положительных корней.

**б)** Докажите, что уравнение

$$a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \dots + a_nx^{k_n} = 1$$

(где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — действительные,  $k_1, k_2, \dots, k_n$  — натуральные числа) имеет не более  $n$  положительных корней.

**в)** Докажите, что уравнение

$$ax^k(x+1)^p + bx^l(x+1)^q + cx^m(x+1)^r = 1$$

(где  $a, b, c$  — действительные,  $k, l, m, p, q, r$  — натуральные числа) имеет не более 14 положительных корней.

**440\*.** Куб  $100 \times 100 \times 100$  составлен из миллиона единичных кубиков. Назовем шампуром прямую, проходящую через центры кубиков и параллельную ребрам куба.

**а)** При каком наименьшем  $K$  можно провести  $K$  непересекающихся шампуров так, чтобы к ним нельзя было добавить еще один не пересекающий их шампур?

**б)** При каком наибольшем  $K$  можно провести  $3K$  непересекающихся шампуров так, чтобы среди них было  $K$  шампуров каждого направления?

**441.** Внутри выпуклого  $2n$ -угольника взята произвольная точка  $P$ . Через каждую вершину и точку  $P$  проведена прямая. Докажите, что найдется сторона многоугольника, с которой ни

одна из проведенных прямых не имеет общих точек (кроме, быть может, концов стороны).

**442.** Дано простое число  $p > 2$ . Для каждого  $k$  от 1 до  $p - 1$  обозначим через  $a_k$  остаток от деления числа  $k^p$  на  $p^2$ . Докажите, что

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{p-1} = (p^3 - p^2)/2.$$

**443.** Имеется таблица  $n \times n$  клеток, в каждой клетке которой вначале стоит число 0. Разрешается произвольно выбрать  $n$  чисел, стоящих в разных строках и в разных столбцах, и увеличить каждое из них на единицу.

а) Можно ли за несколько шагов получить таблицы, изображенные на рисунках 83 и 84?

1	2	3	...	$n$
2	3	4	...	1
3	4	5	...	2
...	...	...	...	...
$n$	1	2	...	$n-1$

Рис. 83

1	2	3	...	$n$
2	3	4	...	$n+1$
3	4	5	...	$n+2$
...	...	...	...	...
$n$	$n+1$	$n+2$	...	$2n-1$

Рис. 84

б) Можно ли получить таблицу с попарно различными числами?

в) Какие вообще таблицы можно получить через  $T$  шагов?

**444.** а) На рисунке 85 четыре прямые разбивают плоскость на одиннадцать областей: четырехугольник (1), два треугольника (2 и 3), три угла (4, 5 и 6), четыре «бесконечных треугольника»

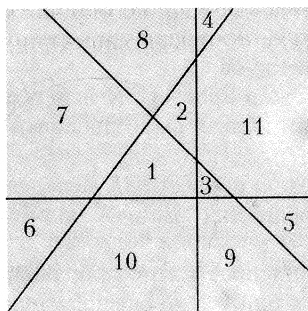


Рис. 85

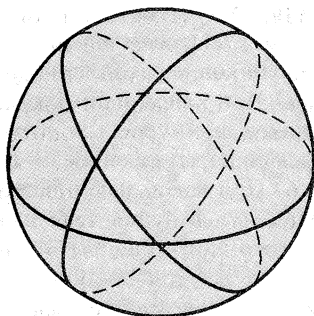


Рис. 86

– области, ограниченные каждая отрезком и двумя лучами (7,8,9,10), и «бесконечный четырехугольник» – область, ограниченную двумя отрезками и двумя лучами (11).

Будет ли сказанное верно для любых четырех прямых на плоскости, среди которых нет параллельных и нет троек прямых, проходящих через одну точку?

б) Три больших круга, не проходящих через одну точку, разбивают сферу на восемь треугольников. (Большим кругом на сфере называют окружность, являющуюся пересечением сферы с плоскостью, проходящей через ее центр; рис.86.) На какие области разбивают сферу четыре больших круга, никакие три из которых не проходят через одну точку?

в) На какие области могут разбить сферу пять больших кругов, никакие три из которых не проходят через одну точку?

**445.** Центры одинаковых непересекающихся окружностей находятся в центрах правильных шестиугольников, покрывающих плоскость так, как показано на рисунке 87. Пусть  $M$  – многоугольник с вершинами в центрах окружностей. Окрасим в красный цвет те окружности или их части (дуги), которые лежат внутри  $M$ . Покажите, что сумма градусных величин красных дуг равна  $C \cdot 180^\circ$ , где  $C = C(M)$  – целое число, и дайте этому числу геометрическую интерпретацию.

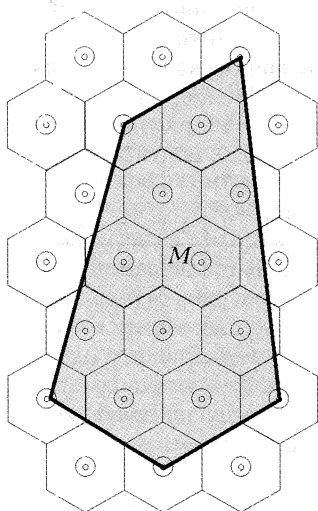


Рис. 87

**446.** Окружность длиной 1 катится снаружи по окружности длиной  $\sqrt{2}$ . В начальный момент времени точка касания окружностей отмечена липкой краской. При качении покрашенные точки той и другой окружностей вновь красят точки, с которыми они соприкасаются (рис. 88). Сколько разных точек неподвижной окружности будет запачкано к тому моменту, когда подвижная окружность сделает 100 оборотов вокруг неподвижной?

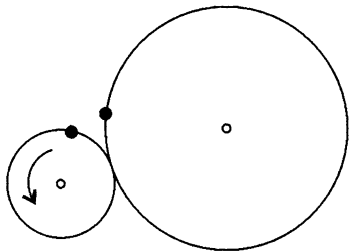


Рис. 88

**447.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  отрезки  $BO$  и  $CO$  (где  $O$  – центр описанной окружности) продолжены до пересечения в точках  $D$  и  $E$  со сторонами  $AC$  и  $BC$  треугольника. Оказалось, что  $\angle BDE = 50^\circ$ , а  $\angle CED = 30^\circ$ . Найдите величины углов треугольника  $ABC$  и докажите равенства  $AE = ED$ ,  $CE = CB$ ,  $CD = CO$ .

**448.** Докажите, что центры всех эллипсов, вписанных в данный четырехугольник, лежат на прямой, проходящей через середины диагоналей этого четырехугольника.

**449.** а) По одной прямой двигаются  $n$  одинаковых шариков. Какое максимальное число соударений между ними может произойти?

б) Тот же вопрос для трех шариков массами  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ .

в) Попробуйте доказать, что если по одной прямой двигаются  $n$  различных шариков, то общее число столкновений между ними конечно.

(В этих задачах шарики рассматриваются как материальные точки, сталкивающиеся друг с другом абсолютно упруго, т.е. с сохранением суммарных импульса и энергии, причем предполагается, что все происходящие столкновения – только парные: по три и более шариков в одной точке одновременно не оказываются.)

**450.** Система прямоугольников из  $n$  этажей (рис.89) построена следующим образом. Начиная с нижнего прямоугольника, образующего первый этаж, верхняя сторона каждого прямоугольника делится в отношении 1:2:3, на трех полученных отрезках как на основаниях строятся прямоугольники той же высоты, что и первоначальный, и так – до самого верхнего этажа. Из полученного множества прямоугольников выбрано некоторое подмножество, состоящее из попарно неравных прямоугольников (одно такое подмножество на рисунке выделено). Докажите, что найдется вертикальная прямая, пересекающая не более двух из выбранных прямоугольников.

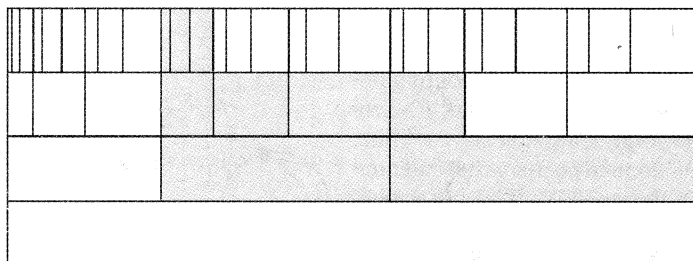


Рис. 89

**451.** На плоскости отмечены несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Известно, что если прямая проходит через две или более отмеченные точки, то сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны нулю.

**452.** В окружность вписаны треугольники  $T_1$  и  $T_2$ , причем вершины треугольника  $T_2$  являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника  $T_1$ . Докажите, что в шестиугольнике  $T_1 \cap T_2$  диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника  $T_1$  и пересекаются в одной точке.

**453\*.** Дано множество положительных чисел  $\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$ . Для каждого его подмножества выпишем сумму входящих в него чисел (рассматриваются суммы из одного, двух, ...,  $n$  слагаемых). Докажите, что все выписанные числа можно так разбить на  $n$  групп, чтобы в каждой группе отношение наибольшего числа к наименьшему не превосходило 2.

**454.** За круглым столом сидят семь гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает все свое молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же делает следующий сосед справа и так далее. После того как последний, седьмой, гном разлил всем остальным свое молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

**455.** Мы будем рассматривать многочлены  $P, Q, R, \dots$  от одного переменного со старшим коэффициентом 1. Будем говорить, что два таких многочлена  $P$  и  $Q$  коммутируют, если многочлены  $P(Q(x))$  и  $Q(P(x))$  тождественно равны (т.е. после раскрытия скобок и приведения к стандартному виду все коэффициенты этих многочленов совпадают).

а) Для каждого числа  $a$  найдите все многочлены степени не выше 3, коммутирующие с многочленом  $P(x) = x^2 - a$ .

б) Пусть  $P$  — многочлен степени 2,  $k$  — натуральное число. Докажите, что существует не более одного многочлена степени  $k$ , коммутирующего с  $P$ .

в) Найдите все многочлены степеней 4 и 8, коммутирующие с данным многочленом  $P$  степени 2.

г) Многочлены  $Q$  и  $R$  коммутируют с одним и тем же многочленом  $P$  степени 2. Докажите, что они коммутируют между собой.

д) Докажите, что существует бесконечная последовательность многочленов  $P_2, P_3, P_4, \dots, P_k \dots$ , где  $P_k$  — многочлен степени  $k$ , в которой любые два многочлена коммутируют и многочлен  $P_2$  имеет вид  $P_2(x) = x^2 - 2$ .

**456.** В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся 3 ребра. Известно, что каждая его грань является многоугольником, вокруг которого можно описать окружность. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу.

**457.** На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев особенной, если продолжение одного из звеньев пересекает другое (рис. 90). Докажите, что число особенных пар четно.

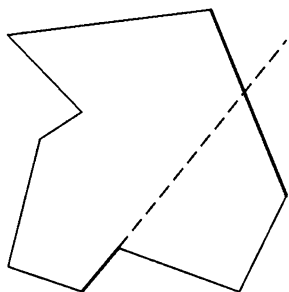


Рис. 90

**458.** Написан многочлен  $x^{10} + *x^9 + *x^8 + \dots + *x^2 + *x + 1$ . Двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет одну из звездочек некоторым числом, затем второй заменяет числом любую из оставшихся звездочек, затем снова первый заменяет одну из звездочек числом и так далее (всего 9 ходов). Если у полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает первый игрок, а если будет хотя бы один корень — выигрывает второй. Может ли второй игрок выиграть при любой игре первого?

**459\*.** В некоторой стране из каждого города в другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездки по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбирался произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирается любой из них), и так до тех пор, пока не будут пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту.

**460\*.** Пусть  $A$  —  $2n$ -значное число (первая цифра не ноль). Будем называть число  $A$  особым, если оно само является точным квадратом и числа, образованные его первыми  $n$  цифрами и его последними  $n$  цифрами, также являются точными квадратами; при этом второе число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю.

а) Найдите все двузначные и четырехзначные особые числа.

б) Докажите, что существует хотя бы одно 20-значное особое число.

б) Докажите, что существует не более 10 особых 100-значных чисел.

г) Докажите, что существует хотя бы одно 30-значное особое число.

**461.** На столе стоят чашечные весы и  $n$  гирь различных масс. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берется любая гиря и добавляется на ту или другую чашку весов).

а) Докажите, что гири можно ставить в таком порядке, чтобы сначала перевесила левая чашка, затем правая, потом снова левая, снова правая и так далее.

Этой последовательности результатов взвешиваний сопоставим слово из букв  $L$  и  $R$ :  $LRLRLRLR\dots$  Здесь буква  $L$  означает, что перевесила левая чашка, а буква  $R$  означает, что перевесила правая чашка.

б) Докажите, что для любого слова длиной  $n$  из букв  $L$  и  $R$  можно в таком порядке ставить гири на чашки весов, чтобы это слово соответствовало последовательности результатов взвешиваний.

**462.** Плоскость пересекает боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды в точках, отстоящих от вершины на расстояния  $a, b, c$  и  $d$  (рис.91).

Докажите, что

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}.$$

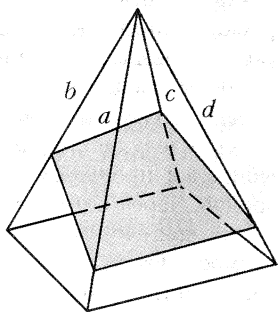


Рис. 91

**463\*.** Даны натуральные числа  $x_1, x_2, \dots, x_m$ ,  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Суммы  $x_1 + x_2 + \dots + x_m$  и  $y_1 + y_2 + \dots + y_n$

равны между собой и меньше  $mn$ . Докажите, что в равенстве  $x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$  можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство.

**464\*.** На плоскости даны 1000 квадратов со сторонами,

параллельными осям координат. Пусть  $M$  — множество центров этих квадратов. Докажите, что можно отметить часть квадратов так, чтобы каждая точка множества  $M$  попала не менее чем в один и не более чем в четыре отмеченных квадрата.

**465\*.** Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, ..., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, ..., 99. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычеркиванием одной из цифр. Докажите, что:

- а) можно разложить все билеты в 50 ящиков;
- б) нельзя разложить все билеты менее чем в 40 ящиков;
- в) нельзя разложить все билеты менее чем в 50 ящиков.

Пусть, вообще, имеется  $10^k$  билетов с  $k$ -значными номерами от 00...0 до 99...9. Билет разрешается опускать в ящик, номер которого можно получить из номера этого билета вычеркиванием некоторых  $k - 2$  цифр.

г) Докажите, что при  $k = 4$  все 10000 четырехзначных билетов можно разложить по 34 ящикам.

д) Найдите минимальное количество ящиков, в которые можно разложить  $k$ -значные билеты. Попробуйте решить эту задачу для  $k = 4, 5, 6, \dots$

**466.** Среди 1977 монет 50 фальшивых. Каждая фальшивая монета отличается от настоящей на один грамм (в ту или другую сторону). Имеются чашечные весы со стрелкой, показывающей разность масс одной и другой чашек. За одно взвешивание про одну выбранную монету нужно узнать, фальшивая она или настоящая. Как это сделать?

**467.** Точки  $D$  и  $E$  делят стороны  $AC$  и  $AB$  правильного треугольника  $ABC$  в отношениях  $AD : DC = BE : EA = 1 : 2$ . Прямые  $BD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что угол  $AOC$  — прямой.

**468.** Точки  $A, B, C$  и  $D$  плоскости таковы, что для любой точки  $M$  этой плоскости скалярные произведения векторов  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$  и  $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$  не равны друг другу. Докажите, что  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ . Верно ли обратное утверждение?

**469.** а) Уравнение  $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$  имеет четыре различных вещественных корня. Докажите, что  $ab < 0$ .

б) Уравнение

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{k-1} x^{n-k+1} + a_{k+1} x^{n-k-1} + \dots + a_n = 0$$

имеет  $n$  различных вещественных корней. Докажите, что  $a_{k-1} a_{k+1} < 0$ .



**470.** Докажите такие равенства:

$$\text{а) } \frac{1}{C_n^0} - \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^2} - \dots + \frac{(-1)^k}{C_n^k} + \dots + \frac{(-1)^n}{C_n^n} = \frac{(n+1)(1+(-1)^n)}{n+2};$$

$$\text{б) } \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^2} + \frac{1}{C_n^3} + \dots + \frac{1}{C_n^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \left( \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \dots + \frac{2^n}{n} \right).$$

**471.** Две пересекающиеся окружности вырезают из плоскости три ограниченные непересекающиеся области. Докажите, что не существует окружности, делящей пополам площадь каждой из этих трех областей.

**472.** Внутри куба расположен выпуклый многогранник, проекция которого на каждую из граней куба совпадает с этой гранью. Докажите, что объем многогранника не меньше  $1/3$  объема куба.

**473.** Имеется 2 группы по  $n$  гирь, в каждой из которых гири расположены в порядке возрастания их масс. Покажите, что:

а)  $2n - 1$  взвешиваниями можно расположить все  $2n$  гирь в порядке возрастания их масс;

б) меньшим  $2n - 1$  числом взвешиваний это сделать, вообще говоря, нельзя.

(За одно взвешивание сравнивают массы двух гирь; массы всех  $2n$  гирь попарно различны.)

**474.** Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме своих делителей (кроме самого себя); таковы, например, числа  $6 = 1 + 2 + 3$  и  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ . Докажите, что число  $N$  несовершенно, если известно, что оно:

а) при делении на 4 дает остаток 3;

б) при делении на 6 дает остаток 5.

(До сих пор вообще неизвестно, существуют ли нечетные совершенные числа.)

**475. а)** Докажите, что правильный треугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге так, чтобы его углы попали точно в узлы (вершины клеток).

б) Докажите, что на клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, можно при любом  $\varepsilon > 0$  нарисовать правильный треугольник, вершины которого находились бы на расстоянии меньше  $\varepsilon$  от трех различных узлов.

в) Верно ли, что для любого многоугольника  $M$  и любого  $\varepsilon > 0$  можно нарисовать на клетчатой бумаге подобный  $M$  многоугольник, все вершины которого находились бы на расстояниях меньше  $\varepsilon$  от различных узлов?

**476\*.** а) Докажите, что если вершины выпуклого  $n$ -угольника лежат в узлах клетчатой бумаги, а внутри и на его сторонах других узлов нет, то  $n \leq 4$ .

б) Пусть пространство разбито тремя семействами параллельных плоскостей на одинаковые кубики. Вершины кубиков назовем узлами. Докажите, что если все  $n$  вершин выпуклого многогранника лежат в узлах, а на его ребрах, гранях и внутри многоугольника других узлов нет, то  $n \leq 8$ .

**477.** Дан многочлен  $P(x)$  с целыми коэффициентами такой, что для каждого натурального  $x$  выполняется неравенство  $P(x) > x$ . Определим последовательность  $\{b_n\}$  следующим образом:  $b_1 = 1$ ,  $b_{k+1} = P(b_k)$  для  $k \geq 1$ . Известно, что для любого натурального  $d$  найдется член последовательности  $\{b_n\}$ , делящийся на  $d$ . Докажите, что  $P(x) = x + 1$ .

**478.** В волейбольном турнире каждые две команды сыграли по одному матчу.

а) Докажите, что если для любых двух команд найдется третья, которая выиграла у этих двух, то число команд не меньше семи.

б) Постройте пример такого турнира семи команд.

в) Докажите, что если для любых трех команд найдется такая, которая выиграла у этих трех, то число команд не меньше 15.

**479.** Существуют ли: а) шесть; б) 1000 таких различных натуральных чисел, что для любых двух  $a$  и  $b$  из них сумма  $a + b$  делится на разность  $a - b$ ?

**480\*.** Последовательность  $\{c_n\}$  строится по следующему правилу:  $c_1 = 2$ ,  $c_{n+1} = [3c_n/2]$  для  $n \geq 1$  (здесь  $[x]$  — целая часть числа  $x$ ). Докажите, что:

а) в этой последовательности бесконечно много четных чисел и бесконечно много нечетных чисел;

б) последовательность  $e_n = (-1)^{c_n}$  непериодическая;

в) существует число  $\gamma$  такое, что  $c_n = \left[ (3/2)^n \gamma \right] + 1$ .

## 1978 ГОД

**481.** В последовательности натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$  каждый член  $a_{k+1}$  равен сумме квадратов цифр в десятичной записи числа  $a_k$  ( $k \geq 1$ ). Докажите, что при любом  $a_1$  в этой последовательности встретится число 1 или число 89.

**482.** Сечение правильного тетраэдра — четырехугольник. Докажите, что периметр этого четырехугольника больше  $2a$ , но меньше  $3a$ , где  $a$  — длина ребра тетраэдра.

**483.** а) Докажите, что отношение квадрата радиуса вписан-

ной окружности прямоугольного треугольника к сумме квадратов длин медиан, проведенных из острых углов, не превосходит  $1/20$ .

б) Найдите наибольшее значение, которое может принимать это отношение.

**484.** При каких  $n$  существует выпуклый  $n$ -угольник, который можно разрезать на несколько правильных многоугольников (не обязательно одинаковых)?

**485\*.** а) Докажите, что число  $e$  заключено между числами

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{при любом натуральном } n.$$

б) Докажите, что последовательность  $c_n = \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  монотонно возрастает, а последовательность

$$d_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{монотонно убывает.}$$

в) Разделим отрезок  $[a_n; b_n]$  на четыре равных по длине отрезка. В каком из них лежит число  $e$ ?

г) Разделим отрезок  $[a_n; b_n]$  на восемь равных частей. В какой из них лежит число  $e$ ?

д) А если отрезок  $[a_n; b_n]$  разделить на  $2^k$  равных частей (в этой задаче интересно получить ответ для достаточно больших  $n$ , например для  $n > 2^k$ )?

$$(\text{Напомним, что } e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718\dots)$$

**486.** Какое из чисел больше:

$$\text{а) } 2^{3^{2^3}} \text{ или } 3^{2^{3^2}}; \quad \text{б) } 2^2 \Big\}_n \text{ или } 3^{2^3} \Big\}_n ?$$

**487.** На данных окружностях  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  постройте по хорде так, чтобы эти хорды были гомотетичны с заданным центром  $A$ , принадлежащим  $\gamma_1$ , и чтобы длина хорды окружности  $\gamma_2$  равнялась заданной величине  $a$ .

**488.** Рассмотрим последовательность многочленов  $P_0, P_1, P_2, \dots$ , определяемую условиями

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Докажите равенства (здесь через  $\prod_{1 \leq k \leq n} a_k$  обозначается произведение

$a_1 a_2 \dots a_n$ , через  $\sum_{1 \leq j \leq m} b_j$  — сумма  $b_1 + b_2 + \dots + b_m$ ):

$$\text{а) } x - \underbrace{\frac{1}{x - \frac{1}{x - \dots - \frac{1}{x}}}}_{n \text{ раз}} = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)};$$

$$\text{б) } \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi} = P_n(2 \cos \varphi), \text{ если } \frac{\varphi}{\pi} - \text{нечелое};$$

$$\text{в) } \left( t^{n+1} - \frac{1}{t^{n+1}} \right) = \left( t - \frac{1}{t} \right) P_n \left( t + \frac{1}{t} \right), \text{ если } t \neq 0;$$

$$\text{г) } P_n(x) = \prod_{1 \leq k \leq n} \left( x - 2 \cos \frac{\pi k}{n+1} \right);$$

$$\text{д) } P_n(x) = \sum_{0 \leq j \leq n/2} (-1)^j C_{n-j}^j x^{n-2j};$$

$$\text{е) } \prod_{1 \leq k \leq m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{1}{2^m}.$$

Придумайте и докажите аналогичные равенства для последовательности многочленов, определенной теми же соотношениями, что и предыдущая последовательность, но начинающейся с  $P_0(x) = 2$ ,  $P_1(x) = x$ .

**489\*.** Даны три числа  $a, b, c$ . Построим три последовательности  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ ,  $\{c_n\}$ , у которых  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ ,  $c_1 = c$  и  $a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}$ ,  $b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}$ ,  $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  для любого  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Докажите, что все эти три последовательности имеют общий предел, и найдите его.

**490\*.** Пусть  $p$  — простое нечетное число. Дано  $p-1$  целых чисел, не делящихся на  $p$ . Докажите, что, заменив некоторые из этих чисел на противоположные, можно получить  $p-1$  чисел, сумма которых делится на  $p$ .

**491.** Рассмотрим геометрическую прогрессию, все члены которой — целые числа. (Например: 16, 24, 36, 54, 81.)

а) Докажите, что сумма квадратов трех последовательных членов прогрессии делится на сумму этих членов.

б) При каких натуральных  $n$  сумма квадратов  $n$  последовательных членов прогрессии обязательно делится на сумму этих  $n$  членов?

**492.** В треугольник  $ABC$  вписан треугольник  $A_1B_1C_1$  (так, что вершины  $A_1, B_1$  и  $C_1$  лежат на сторонах  $BC, CA$  и  $AB$  соответ-

ственно), причем отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ , и  $CC_1$  пересекаются в одной точке  $P$ . Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $AC$  и  $A_1C_1$ , пересекаются в одной точке  $Q$ , причем точки  $P$ ,  $Q$  и центр тяжести треугольника  $ABC$  лежат на одной прямой.

**493.** Докажите неравенства

$$0,785n^2 - n < \sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} < 0,79n^2.$$

**494.** Внутри квадрата со стороной 1 расположено  $n^2$  точек. Докажите, что существует ломаная, содержащая эти точки, длина которой меньше: а)  $3n$ ; б)  $2n$ .

**495\*.** В космическом пространстве вокруг планеты  $O$  по трем круговым орбитам с центром  $O$  равномерно вращаются три спутника. Угловые скорости спутников равны  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  соответственно, а их начальные положения могут быть произвольными. Обязательно ли найдется такой момент времени, когда все три спутника и точка  $O$  лежат в одной плоскости, если:

а)  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$ ; б)  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ,  $\omega_3 = 2$ ;

в)  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 3$ ,  $\omega_3 = 4$ ?

Попробуйте выяснить, какой будет ответ на этот вопрос при других соотношениях угловых скоростей.

**496.** Каких шестизначных чисел больше: представимых в виде произведения двух трехзначных чисел или непредставимых?

**497.** На сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$  взяты произвольные точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ; на отрезках  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  как на диаметрах построены окружности. Докажите, что три общие хорды пар этих окружностей пересекаются в точке пересечения высот треугольника  $ABC$ .

**498.** Для каждого натурального  $n \geq 3$  укажите наименьшее  $k$  такое, что любые  $n$  точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно разделить  $k$  прямыми. (Прямые разделяют данные точки, если для любых двух из этих точек найдется прямая, от которой они лежат по разные стороны.)

**499.** Назовем число *уравновешенным*, если в его десятичной записи некоторое начало совпадает с некоторым концом (например, числа 1971, 19219 уравновешены, а число 1415145 – нет). Докажите, что существует число, которое после приписывания к нему любой из 10 цифр становится уравновешенным.

**500\*.**  $N$  первоклассников выстроены в одну шеренгу (плечом к плечу). По команде «нале-ВО» все одновременно повернулись на  $90^\circ$ , некоторые – налево, а другие – направо. Ровно через секунду каждый, кто стал лицом к лицу со своим соседом, поворачивается «кругом» – на  $180^\circ$ . Еще через секунду каждый,

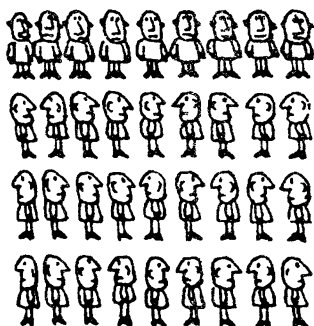


Рис. 92

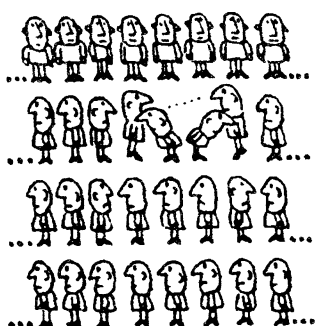


Рис. 93

оказавшийся теперь лицом к лицу с соседом, снова поворачивается на  $180^\circ$  и так далее (рис.92).

а) Докажите, что через конечное время движение прекратится.

б) Какое наибольшее число раз мог повернуться «кругом» один человек?

в) Какое наибольшее количество времени могло продолжаться движение в строю?

г) Пусть шеренга бесконечна в обе стороны, и по команде «нале-ВО» только конечное множество  $K$  первоклассников повернулись направо, а остальные – налево. Тогда по правилу задачи (выделенному курсивом) движение продолжалось бы бесконечно долго. Докажите, однако, что движение прекратится через конечное время, если это правило заменить таким: первоклассник поворачивается на  $180^\circ$ , только если первый (его сосед) и третий из стоящих перед ним обращены к нему лицом (рис.93).

**501\*.** Выберем из последовательности степеней тройки 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, ... все числа, начинающиеся с цифры 9; пусть эти числа (по порядку)  $3^{f(1)}$ ,  $3^{f(2)}$ ,  $3^{f(3)}$ , ... (в частности,  $f(1) = 2$ , так как первое из таких чисел  $3^2 = 9$ ).

а) Найдите  $f(2)$  и  $f(3)$  – номера второго и третьего такого числа.

б) Докажите, что таких чисел бесконечно много.

в) Докажите, что  $f(n)$  при  $n > 1$  удовлетворяет условиям

$$f(n) - n \text{ нечетно, } \left| f(n) - \frac{n - \lg 9}{1 - \lg 9} \right| < 1$$

и определяется этими условиями однозначно.

**502.** Даны три параллельных отрезка  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , не

лежащих в одной плоскости. Пусть  $M$  – точка пересечения плоскостей  $ABC_1$ ,  $BCA_1$ , и  $CAB_1$ , а  $M_1$  – точка пересечения плоскостей  $A_1B_1C$ ,  $B_1C_1A$  и  $C_1A_1B$ . Докажите, что отрезок  $MM_1$  параллелен трем первоначальным.

**503.** Набор из  $2n + 1$  чисел  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$  таков, что  $a_k \geq \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$  для всех  $k = 1, 2, \dots, 2n - 1$ . Докажите неравенство

$$\frac{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}}{n} \geq \frac{a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}}{n+1}$$

и выясните, для каких наборов оно превращается в равенство.

**504\*.** На шахматную доску  $n \times n$  клеток уложено  $k$  плиток размером  $2 \times 1$ , причем так, что положить  $(k+1)$ -ю плитку, не перемещая уже имеющихся плиток, нельзя. Докажите, что свободных плиток осталось не более чем:

а)  $\frac{n^2 + n + 1}{3}$ ; б)  $\frac{n^2 + 2}{3}$ ; в)  $\frac{n^2}{3}$ .

Можно ли получить для некоторых  $n$  еще более точную оценку?

**505\*.** а) Пусть на прямой помещены  $n$  материальных точек одной и той же массы. Рассмотрим произвольный отрезок длиной  $2r$ , содержащий хотя бы одну из этих точек, и найдем центр тяжести  $O_1$  всех попавших в него точек. Рассмотрим отрезок длиной  $2r$  с серединой  $O_1$  и найдем центр тяжести  $O_2$  всех тех точек, которые попали в этот отрезок. Затем найдем центр тяжести  $O_3$  всех точек, попавших в отрезок длиной  $2r$  с серединой  $O_2$  и так далее. Докажите, что, начиная с некоторого номера, все точки последовательности  $O_1, O_2, O_3, \dots$  совпадают.

б) Пусть на плоскости помещены  $n$  материальных точек. Рассмотрим произвольный круг радиусом  $r$ , содержащий хотя бы одну из этих точек, обозначим через  $O_1$  центр тяжести попавших в него точек и построим последовательность  $O_1, O_2, O_3, \dots$ , где  $O_{n+1}$  – центр тяжести точек, попавших в круг радиусом  $r$  с центром  $O_n$ . Верно ли, что, начиная с некоторого номера, все точки этой последовательности совпадают?

**506.** Докажите, что для положительных  $a, b, c$  и  $d$  справедливо неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2.$$

**507\*.** Пусть  $a_1 < a_2 < \dots < a_n < 2n$  – конечная последователь-

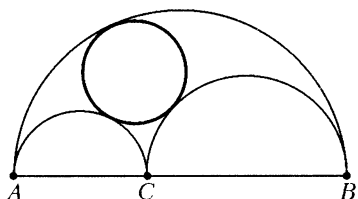


Рис. 94

ность натуральных чисел ( $n \geq 6$ ).

а) Докажите, что  $\min_{i,j} [a_i, a_j] \leq 6 \left( \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 \right)$ , где  $[a_i, a_j]$  означает наименьшее общее кратное чисел  $a_i$  и  $a_j$ , а минимум берется по всем парам

различных чисел  $a_i$  и  $a_j$ .

б) Докажите, что  $\max_{i,j} (a_i, a_j) > \frac{38n}{147} - c$ , где  $c$  не зависит от  $n$ , а  $(a_i, a_j)$  означает наибольший общий делитель  $a_i$  и  $a_j$ .

Оценки в задачах а) и б) нельзя улучшить (т.е. коэффициент 6 заменить меньшим, а  $38/147$  — большим.)

**508.** Окружность касается трех полуокружностей с диаметрами  $AB$ ,  $AC$  и  $BC$  ( $C$  лежит на отрезке  $AB$ ; рис.94) Докажите, что радиус окружности вдвое меньше расстояния от ее центра до прямой  $AB$ .

**509.** Решите в натуральных числах следующие уравнения:

а)  $2^x + 1 = 3^y$ ;

б)  $z^x + 1 = (z + 1)^2$ ;

в)  $z^x + 1 = (z + 1)^y$ .

**510\*.** В книге «Венгерские математические олимпиады» приводится такая задача (№148): «Докажите, что для всех положительных  $\alpha < \pi$  выполнено неравенство  $\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha > 0$ ». Докажите следующее обобщение этого неравенства: для всех  $0 < \alpha < \pi$  и натурального  $n$  верно, что

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha + \dots + \frac{1}{n} \sin n\alpha > 0.$$

**511.** Внутри четырехугольника  $ABCD$  отмечена точка  $M$  такая, что  $ABMD$  — параллелограмм. Докажите, что если  $\angle CBM = \angle CDM$ , то  $\angle ACD = \angle BCM$ .

**512.** Пусть  $f(x) = x^3 - x + 1$ . Докажите, что для любого натурального  $m > 1$  числа  $m$ ,  $f(m)$ ,  $f(f(m))$ ,  $f(f(f(m)))$ , ... попарно взаимно просты.

**513<sup>+</sup>.** Докажите, что существует такое число  $A$ , что в график функции  $y = A \sin x$  можно вписать 1978 попарно неравных квадратов. (Квадрат называется вписанным, если все его вершины принадлежат графику.)



**514\*.** Докажите, что существует такая бесконечная ограниченная последовательность  $\{x_n\}$ , что для любых различных  $m$  и  $k$  выполнено неравенство  $|x_m - x_k| \geq |m - k|^{-1}$ .

**515.** Задано конечное множество  $K_0$ . К нему добавляются все точки, которые можно получить симметричным отражением одной точки этого множества относительно другой. Полученное множество обозначается  $K_1$ . Аналогично из множества  $K_1$  получается  $K_2$ , из  $K_2$  — множество  $K_3$  и так далее.

а) Пусть множество  $K_0$  состоит из двух точек  $A$  и  $B$  на расстоянии 1 друг от друга. При каком наименьшем  $n$  в множестве  $K_n$  найдется точка, находящаяся на расстоянии 10000 от точки  $A$ ?

б) Пусть  $K_0$  состоит из трех вершин правильного треугольника площадью 1. Найдите площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего множество  $K_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

В следующих трех пунктах  $K_0$  — множество четырех вершин правильного тетраэдра объемом 1.

в) Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки множества  $K_1$ . Сколько и каких граней у этого многогранника?

г) Чему равен объем этого многогранника?

д) Найдите объем наименьшего выпуклого многогранника, содержащего множество  $K_n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ).

**516.** Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом. Первый автомат, прочитав карточку  $(a; b)$ , выдает новую карточку  $(a + 1; b + 1)$ ; второй, прочитав карточку  $(a; b)$ , выдает карточку  $(a/2; b/2)$  (он работает только когда  $a$  и  $b$  четные); третий по двум карточкам  $(a; b)$  и  $(b; c)$  выдает карточку  $(a; c)$ . Кроме того, автоматы возвращают все прочитанные карточки.

Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел  $(5; 19)$ . Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку: а)  $(1; 50)$ ; б)  $(1; 100)$ ?

в) Пусть первоначально имеется одна карточка  $(a; b)$ ,  $a < b$ , а мы хотим получить карточку  $(1; n)$ . При каких  $n$  это можно сделать?

**517.** В окружность радиусом  $R$  вписан  $n$ -угольник площадью  $S$ . На каждой стороне  $n$ -угольника отмечено по точке. Докажите, что периметр  $n$ -угольника с вершинами в отмеченных точках не меньше  $2S/R$ .

**518.** Числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  принадлежат отрезку  $[a; b]$ , где  $0 <$

$a < b$ . Докажите неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

**519.** Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке  $m$  спичек, в другой  $n$  спичек,  $m > n$ . Двое игроков по очереди берут из кучек спички. За один ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает игрок, взявший последнюю спичку в одной из кучек.

а) Докажите, что если  $m > 2n$ , то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш.

б) При каких  $\alpha$  верно следующее утверждение: если  $m > \alpha n$ , то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш?

**520.** Рассмотрим последовательность чисел  $x_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n$ . Каждое из них приводится к виду

$$x_n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$

где  $q_n, r_n, s_n, t_n$  — целые числа. Найдите пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{q_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{q_n}.$$

**521.** Обозначим через  $a_n$  целое число, ближайшее к  $\sqrt{n}$ . Найдите сумму

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{1980}}.$$

**522.** На плоскости заданы несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать?

**523.** Фишка стоит в углу шахматной доски размером  $n \times n$  клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Второй раз ходить на поле, на котором фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

а) Докажите, что если  $n$  четно, то начинающий может добиться выигрыша, а если  $n$  нечетно, то выигрывает второй.

б) Кто выигрывает, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

**524.** Докажите, что ни при каком натуральном  $m$  число  $1978^m - 1$  не делится на  $1000^m - 1$ .

**525\*.** Докажите, что для любого тетраэдра существуют такие две плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на эти плоскости не меньше  $\sqrt{2}$ .

**526.** а) Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна

$$S = \frac{\operatorname{tg} \varphi \cdot |a^2 - b^2 + c^2 - d^2|}{4},$$

где  $a, b, c$  и  $d$  — длины последовательных сторон четырехугольника,  $\varphi$  — величина угла между его диагоналями,  $\varphi \neq 90^\circ$ .

б) Можно ли найти площадь  $S$ , зная  $a, b, c$  и  $d$ , если  $\varphi = 90^\circ$ ?

**527.** Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — действительные числа,  $0 \leq x_i \leq 1$ . Докажите, что величина

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{n-1}x_n - x_nx_1$$

не превосходит: а) 1 при  $n = 3$ ; б) 2 при  $n = 4$ ; в)  $\lfloor n/2 \rfloor$  при любом  $n \geq 3$ .

**528.** На каждой клетке шахматной доски стоит по фишке (рис.95). Фишки нужно переставить так, чтобы расстояние между каждой парой фишек не уменьшилось по сравнению с расстоянием между ними при первоначальном расположении. Сколькими способами это можно сделать? (Расстоянием между фишками считается расстояние между центрами клеток, которые они занимают.)

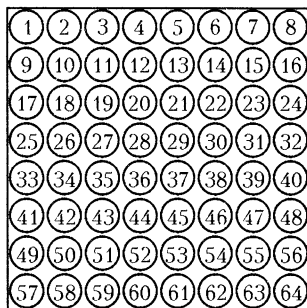


Рис. 95

**529.** а) Многоугольник  $M'$  — образ выпуклого многоугольника  $M$  при гомотетии с коэффициентом  $k = -1/2$ . Докажите, что существует параллельный перенос  $T$  такой, что  $T(M') \subset M$ .

б) При каких коэффициентах гомотетии  $k < 0$  верно аналогичное утверждение для выпуклого многогранника  $M$  в пространстве?

**530.** На прямоугольном листе бумаги в клетку некоторые клетки закрашены в черный цвет. Затем происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: клетка, имевшая четное число черных соседей, становится белой, а имевшая нечетное число черных соседей — черной. (Соседями считаются клетки, имеющие общую сторону.)

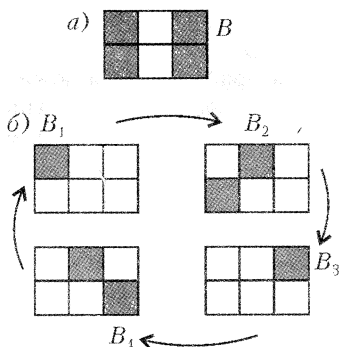


Рис. 96

а) Докажите, что если множество  $B$  черных клеток при перекрашивании не изменяется (рис.96, а), то в  $B$  – четное число клеток.

б) Пусть при перекрашивании множество  $B_1$  черных клеток переходит в  $B_2$ ,  $B_2$  – в  $B_3$ , ... ...,  $B_{r-1}$  – в  $B_1$ , а  $B_r$  – снова в  $B_1$  (рис.96, б). Докажите, что общее число черных клеток в множествах  $B_1, B_2, \dots, B_r$  четно.

**531.** Из пунктов  $A$  и  $B$  не одновременно выехали навстречу друг другу автомобилист и велосипедист. Встретившись в точке  $C$ , они тотчас развернулись и поехали обратно (с теми же скоростями). Доехав до своих пунктов  $A$  и  $B$ , они опять развернулись и второй раз встретились в точке  $D$ ; здесь они вновь развернулись и так далее. В какой точке отрезка  $AB$  произошла их 1978-я встреча?

**532.** Положим  $a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$  и  $b_n = \sqrt{4n+2}$ . Докажите, что для любого натурального  $n$ :

а)  $[a_n] = [b_n]$ , где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ ;

б)  $0 < b_n - a_n < \frac{1}{16n\sqrt{n}}$ .

**533.** Назовем выпуклый многоугольник *особым*, если некоторые три его диагонали пересекаются в одной внутренней точке. Докажите, что у каждого особого семиугольника найдется вершина  $A$ , обладающая таким свойством: для любого  $\epsilon > 0$  вершину  $A$  можно сдвинуть на расстояние, меньшее  $\epsilon$  (не меняя остальных вершин), так, что полученный семиугольник будет неособым.

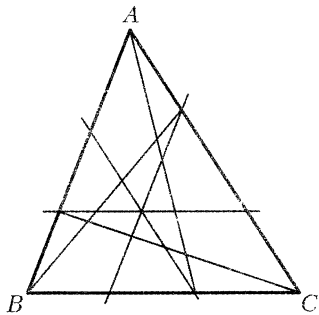


Рис. 97

ну  $A$  можно сдвинуть на расстояние, меньшее  $\epsilon$  (не меняя остальных вершин), так, что полученный семиугольник будет неособым.

**534.** Три прямые, параллельные сторонам треугольника  $ABC$  и проходящие через одну точку, отсекают от треугольника  $ABC$  трапеции. Три диагонали этих трапеций, не имеющие общих концов, делят треугольник на семь частей, из которых четыре – треугольники (рис.97). Докажите, что сумма

площадей трех из этих треугольников, прилежащих к сторонам треугольника  $ABC$ , равна площади четвертого.

**535\*.** Пусть на плоскости задана система из трех бесконечных в обе стороны последовательностей точек  $A_k, B_l, C_m$  (индексы  $k, l, m$  пробегает все множество целых чисел). Назовем такую систему *триграммой*, если для любых  $k$  и  $m$  прямой  $A_k C_m$  принадлежит точка  $B_{k+m}$  этой системы.

а) Проверьте, что система, изображенная на рисунке 98, является триграммой.

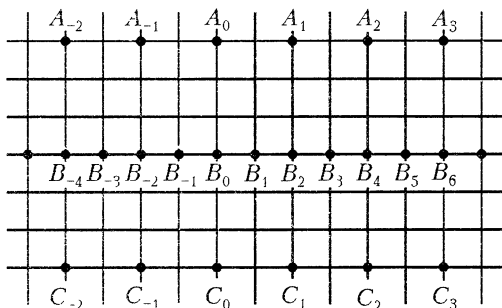


Рис. 98

б) Докажите, что для любых трех различных прямых  $a, b$  и  $c$  существует триграмма, для которой  $A_k \in a, B_l \in b, C_m \in c$  (при всех  $k, l, m$ )

в) Докажите, что если все точки  $A_k$  и  $C_m$  триграммы лежат, соответственно, на прямых  $a$  и  $c$ , то все точки последовательности  $B_l$  также лежат на одной прямой.

Задачи б) и в) советуем сначала решить для случая, когда прямые  $a$  и  $c$  параллельны.

г) Придумайте ограниченную триграмму (все точки которой лежат в пределах некоторого круга).

**536.** а) Докажите, что любой прямоугольник размером  $m \times 2n$  ( $m > 1$ ) клеток можно замостить двумя слоями костяшек домино (плиток  $1 \times 2$  клетки) так, чтобы каждая плитка верхнего слоя опиралась на две разные плитки нижнего слоя.

б) Прямоугольник размером  $2k \times 2n$  клеток уже замощен одним слоем костяшек домино. Докажите, что его можно замостить вторым слоем так, чтобы выполнялось то же условие (т.е. чтобы плитки разных слоев не совпадали).

**537.** Окружность касается внутренним образом окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника  $ABC$ , а также равных сторон  $AB$  и  $AC$  этого треугольника в точках  $P$  и  $Q$

соответственно. Докажите, что середина отрезка  $PQ$  является центром окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

**538\*.** Множество всех натуральных чисел является объединением двух непересекающихся подмножеств  $\{f(1), f(2), \dots, f(n), \dots\}$ ,  $\{g(1), g(2), \dots, g(n), \dots\}$ , где  $f(1) < f(2) < \dots < f(n) < \dots$ ,  $g(1) < g(2) < \dots < g(n) < \dots$  и  $g(n) = f(f(n)) + 1$  для всех  $n \geq 1$ . Определите  $f(240)$ .

**539.** Пусть  $P$  – данная точка внутри данной сферы и  $A, B, C$  – произвольные три точки этой сферы такие, что отрезки  $PA, PB, PC$  взаимно перпендикулярны. Пусть  $Q$  – вершина параллелепипеда, определенного отрезками  $PA, PB, PC$ , диагонально противоположная к  $P$ . Определите множество точек  $Q$ .

**540.** Международное общество состоит из представителей шести различных стран. Список членов общества включает 1978 фамилий, занумерованных числами 1, 2, ..., 1978. Докажите, что существует хотя бы один член общества, номер которого равняется сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

## 1979 ГОД

**541.** В компании из  $N$  человек у каждого ровно трое друзей.

а) Докажите, что  $N$  четно.

б) Всегда ли такую компанию можно разбить на  $N/2$  пар так, чтобы люди в каждой паре были друзьями?

**542.** Дан прямоугольный треугольник  $A_0A_1A_2$  с катетами  $A_0A_2 = a$  и  $A_1A_2 = b$ . Муравей ползет по бесконечной ломаной  $A_2A_3A_4A_5 \dots$ , где  $A_nA_{n+1}$  – высота треугольника  $A_{n-2}A_{n-1}A_n$ .

а) Найдите длину его пути (из бесконечного числа отрезков).

б) Постройте предельную точку  $L$ , к которой приближаются муравей. На каких расстояниях от катетов она находится?

**543.** Пусть

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2} \sqrt{1 + y^2}}.$$

Докажите, что для любых действительных чисел  $a, b, c$  выполнено неравенство

$$\rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c).$$

**544.** Какое наибольшее число вершин, из которых нельзя провести ни одной диагонали (лежащей целиком внутри много-

угольника), может иметь невыпуклый  $n$ -угольник? Решите эту задачу сначала для  $n = 4, 5, 6, 7$ .

**545\*.** На плоскости заданы  $n$  точек. Нужно разместить в этих точках  $n$  прожекторов, каждый из которых освещает угол величиной  $360^\circ/n$  так, чтобы осветить всю плоскость. Докажите, что это возможно при любом расположении данных точек, если:

а)  $n = 3$ ; б)  $n = 4$ ; в)  $n$  – любое натуральное число.

г) Пусть теперь прожекторы освещают углы  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 360^\circ$ ,  $\alpha_k < \pi$  для каждого  $k = 1, 2, \dots, n$ ) и составлены в одну точку так, что они освещают плоскость. Докажите, что можно перенести в каждую из данных точек по одному из  $n$  прожекторов так, что вся плоскость будет по-прежнему освещена.

**546.** Из произвольной точки  $M$  окружности, описанной около прямоугольника, опустили перпендикуляры  $MP$  и  $MQ$  на две его противоположные стороны и перпендикуляры  $MR$  и  $MT$  – на продолжения двух других сторон. Докажите, что прямые  $PR$  и  $QT$  перпендикулярны друг другу, а их точка пересечения принадлежит диагонали прямоугольника.

**547.** Для того чтобы уравнение

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{n},$$

где  $n$  – натуральное число, имело единственное решение в натуральных числах  $x, y$ , необходимо и достаточно, чтобы  $n$  было простым. Докажите это.

**548.** а) На окружности расположены 4 точки. Через середину хорды, соединяющей две из них, проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две другие точки. (Такая прямая проводится для каждой пары точек.) Докажите, что все шесть построенных прямых проходят через одну точку.

б) На окружности расположены 5 точек. Через центр тяжести трех из них (точку пересечения медиан треугольника с вершинами в этих точках) проводится прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей остальные точки. Докажите, что все десять построенных прямых проходят через одну точку.

в) Обобщите эти утверждения на случай  $n$  точек.

**549.** Дано натуральное число  $N$ . Выпишем все его делители  $d_1, d_2, \dots, d_n$  и для каждого из них найдем, сколько делителей оно имеет. Докажите, что для полученных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  выполняется равенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3.$$

Например, число  $N = 6$  имеет четыре делителя: 1, 2, 3, 6; здесь  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 4$  и  $(1 + 2 + 2 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 2^3 + 4^3$ .

**550.** Из пункта  $A$  в пункт  $B$ , расстояние между которыми равно  $d$  км, должны добраться  $n$  велосипедистов, у которых имеется  $m$  велосипедов. Каждый может идти пешком со скоростью  $u$  км/ч или ехать на велосипеде со скоростью  $v$  км/ч. За какое наименьшее время все  $n$  велосипедистов смогут попасть из  $A$  в  $B$ ? (Время считается по последнему прибывшему. Велосипед можно оставлять на дороге без присмотра.) Рассмотрите частный случай:  $m = 2, n = 3$ .

**551.** а) Какое наименьшее число точек достаточно отметить внутри выпуклого пятиугольника, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в вершинах пятиугольника содержалась хотя бы одна отмеченная точка?

б) Тот же вопрос для выпуклого  $n$ -угольника.

**552.** а) Найдите хотя бы одну пару  $(p; q)$  целых чисел, отличных от нуля, для которых трехчлены  $x^2 + px + q$  и  $x^2 + qx + p$  имеют целые корни.

б) Найдите все такие пары  $(p; q)$ .

**553.** Дан треугольник  $ABC$ , причем  $BC < AC < AB$ . На лучах  $BA$  и  $CA$  отложены отрезки  $BD$  и  $CE$  такие, что  $BD = CE = BC$ . Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника  $ADE$ , равен расстоянию между центрами окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , и окружности, вписанной в него.

**554.** Назовем натуральное число  $n$  *хорошим*, если существуют такие натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$  (не обязательно различные), что

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = n, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Известно, что все числа между 33 и 73 хорошие. Докажите, что все числа, большие 73, тоже хорошие.

**555.** Рассмотрим пересечение: а) двух; б) трех цилиндров одного и того же радиуса  $r$ , оси которых взаимно перпендикулярны и проходят через одну точку. Сколько плоскостей симметрии имеет это пересечение? Каков его объем?

**556.** Обязательно ли равны два остроугольных равнобедренных треугольника, имеющих равные по длине боковые стороны и равные радиусы вписанных окружностей?

**557.** Даны  $n$  парно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших  $(2n - 1)^2$ . Докажите, что среди них обязательно встретится простое число.



**558.** В круге расположены  $k > 1$  черных секторов, угол каждого из которых меньше  $180^\circ / (k^2 - k + 1)$ . Докажите, что круг можно повернуть вокруг центра  $O$  так, что все черные секторы перейдут в белую часть круга.

**559.** Докажите, что если  $x, y, z$  – длины сторон треугольника, то

$$\left| \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{x}{z} \right| < 1.$$

**560.** В дне ящика имеется дырка. Нужно сделать выпуклую заслонку наименьшей площади, при любом положении которой на дне ящика дырка будет закрыта. Решите эту задачу, если:

а) дно ящика – квадрат  $4 \times 4$ , а дырка  $1 \times 1$  расположена так, как показано на рисунке 99;

б) дно ящика – квадрат  $n \times n$  ( $n$  нечетно), а дырка  $1 \times 1$  расположена в центре (рис. 100);

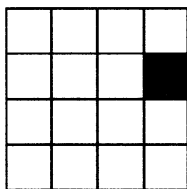


Рис. 99

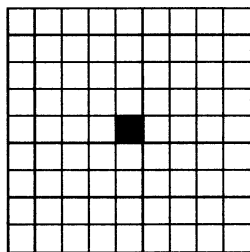


Рис. 100

в) попробуйте решить аналогичную задачу для каких-либо других случаев, когда дно и дырка – выпуклые фигуры.

**561.** Два треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$ , площади которых равны  $S_1$  и  $S_2$ , расположены так, что лучи  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ ,  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$ ,  $C_1A_1$  и  $C_2A_2$  параллельны, но противоположно направлены. Найдите площадь треугольника с вершинами в серединах отрезков  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$ .

**562.** На отрезке  $[0; 1]$  задано множество  $M$ , являющееся объединением нескольких отрезков, такое, что расстояние между любыми двумя точками из  $M$  не равно 0,1. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих  $M$ , меньше: а) 0,55; б) 0,5.

**563.** Функция  $f$  определена на отрезке  $[a; b]$  длиной 4 и имеет на нем непрерывную производную  $f'$ . Докажите, что внутри отрезка  $[a; b]$  найдется точка  $x$ , для которой

$$f'(x) - (f(x))^2 < 1.$$

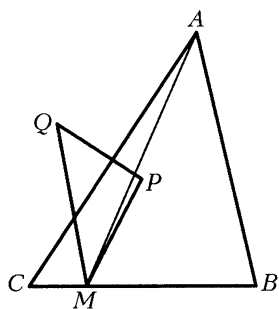


Рис. 101

**564.** Для каких точек  $M$  стороны  $BC$  треугольника  $ABC$  верно утверждение: треугольник  $MPQ$  подобен треугольнику  $ABC$ , если точки  $P$  и  $Q$  являются:

а) центрами окружностей, описанных около треугольников  $ABM$  и  $ACM$  соответственно (рис. 101);

б) точками пересечения их медиан;

в) точками пересечения их высот?

**565\*.** Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — различные положительные числа. Обозначим через  $b_k$  среднее арифметическое всевозможных произведений по  $k$  данных чисел ( $k = 1, 2, \dots, n$ ):

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n}{\frac{n(n-1)}{2}},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$b_n = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Докажите такие неравенства:

- а)  $b_1 \geq \sqrt{b_2}$  ;
- б)  $b_k^2 \geq b_{k-1} b_{k+1}$  ( $k = 2, \dots, n-1$ );
- в)  $\sqrt[k]{b_k} \geq \sqrt[k+1]{b_{k+1}}$  ( $k = 2, \dots, n-1$ ).

**566.** Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины одного из которых лежат, соответственно, на трех сторонах другого?

**567.** Натуральные числа  $q$  и  $p$  взаимно просты. Отрезок  $[0; 1]$  разбит на  $p + q$  одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из  $p + q - 2$  чисел

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}.$$

**568.** Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что:

а) если радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  и  $DOA$ , равны между собой, то  $ABCD$  — ромб;

б) если радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  и  $DAB$ , равны между собой, то  $ABCD$  – прямоугольник.

**569.** В тетради написаны несколько чисел. К этим числам разрешается приписать число, равное среднему арифметическому двух или нескольких из них, если оно отлично от всех уже написанных чисел. Докажите, что, начав с двух чисел 0 и 1, с помощью описанных операций можно получить: а) число  $1/5$ , б) любое рациональное число между 0 и 1.

**570\*.** Задан набор квадратов, сумма площадей которых равна 4. Докажите, что квадратами этого набора всегда можно покрыть квадрат площадью 1.

**571.** Убывающая последовательность  $\{x_n\}$  положительных чисел такова, что при любом натуральном  $n$

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \dots + \frac{x_{n^2}}{n} \leq 1.$$

Докажите, что при любом натуральном  $n$

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n} < 3.$$

**572.** Кенгуру прыгает по углу  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  координатной плоскости  $Oxy$  следующим образом: из точки  $(x; y)$  кенгуру может прыгнуть в точку  $(x+1; y-1)$  или в точку  $(x-5; y+7)$ , причем прыгать в точки, у которых одна из координат отрицательна, не разрешается. Из каких начальных точек  $(x; y)$  кенгуру не может попасть в точку, находящуюся на расстоянии больше 1000 от начала координат? Нарисуйте множество всех таких точек  $(x; y)$  и найдите его площадь.

**573.** Через точку  $O$ : а) на плоскости; б) в пространстве проведены 1979 прямых, никакие две из которых не перпендикулярны друг другу. На прямой  $l_1$  взята произвольная точка  $A_1$ , отличная от  $O$ . Докажите, что можно выбрать на каждой из остальных прямых по точке  $A_i \in l_i$  ( $i = 2, 3, \dots, 1979$ ) так, чтобы были взаимно перпендикулярны следующие 1979 пар прямых:

$$A_1A_3 \perp l_2, A_2A_4 \perp l_3, \dots, A_{i-1}A_{i+1} \perp l_i, \dots, A_{1977}A_{1979} \perp l_{1978}, \\ A_{1978}A_1 \perp l_{1979}, A_{1979}A_2 \perp l_1.$$

**574\*.** Конечная последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n$  из чисел 0 и 1 должна удовлетворять следующему условию: для любого целого  $k$  от 0 до  $n-1$  сумма  $a_1a_{k+1} + a_2a_{k+2} + \dots + a_{n-k}a_n$  является нечетным числом.

а) Придумайте такую последовательность для  $n = 25$ .

б) Докажите, что такая последовательность существует для некоторого  $n > 1000$ .

**575\*.** На прямой по порядку расположены точки  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  так, что длины отрезков  $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$  не превосходят 1. Требуется отметить  $k - 1$  из точек  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  красным цветом так, чтобы длины любых двух из  $k$  частей, на которые отрезок  $A_0A_n$  разбивается красными точками, отличались не более чем на 1. Докажите, что это всегда можно сделать: а) для  $k = 3$ ; б) для каждого натурального  $k < n$ .

**576.** На плоскости даны несколько точек. Для некоторых пар  $(A; B)$  этих точек взяты векторы  $\overrightarrow{AB}$ , причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна 0.

**577.** Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размером: а)  $8 \times 8$  клеток; б)  $n \times n$  клеток для того, чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-либо стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка? (Фишки ставятся в центры полей.)

**578.** Найдите  $x$  и  $y$  из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a, \\ \frac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b \end{cases}$$

( $a$  и  $b$  — данные числа).

**579.** Докажите, что для любых чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , принадлежащих отрезку  $[0; 1]$ , выполнено неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

**580.** В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если  $A$  — враг  $B$ , то  $B$  — враг  $A$ .)

**581.** а) Существует ли трехзначное число, куб которого оканчивается на три семерки?

б) Для любого ли набора цифр, последняя из которых не 0, существует куб, оканчивающийся этим набором цифр?

**582.** В окружность с центром  $O$  вписан четырехугольник со

взаимно перпендикулярными диагоналями. Докажите, что расстояние от точки  $O$  до каждой его стороны равно половине длины противоположной стороны.

**583.** Рассматриваются наборы камней, масса каждого из которых не больше 2 кг, а общая масса набора равна 50 кг. Из такого набора выбирается несколько камней, суммарная масса которых отличается от 10 кг на наименьшее возможное для данного набора число  $D$ . Какое наибольшее значение может принимать число  $D$  для всевозможных наборов камней?

**584.** Можно ли представить все пространство в виде объединения прямых, каждые две из которых – скрепляющиеся (т.е. не лежат в одной плоскости)?

**585\*.** На химической конференции присутствовали  $N$  ученых – химиков и алхимиков, причем химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, иногда лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого ученого должен установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому ученому может задать вопрос: «Кем является такой-то – химиком или алхимиком?» (В частности: «Кто Вы?»). Докажите, что математик может выяснить все, что требуется: а) за  $4N$  вопросов; б) за  $2N - 2$  вопроса. в) Постарайтесь придумать способ, позволяющий установить, кто – химик, а кто – алхимик, за меньшее число вопросов (авторам известен довольно громоздкий способ, позволяющий сделать это за  $\lceil 3N/2 \rceil$  вопросов).

**586.** В треугольнике  $ABC$ , у которого  $\angle B = 60^\circ$ , провели биссектрисы  $AD$  и  $CE$ , пересекающиеся в точке  $O$ . Докажите, что  $OD = OE$ .

**587.** Дана тройка чисел  $2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Разрешается любые два из них заменить двумя такими их суммой, деленной на  $\sqrt{2}$ , и их разностью, также деленной на  $\sqrt{2}$ . Можно ли, проделав эту процедуру несколько раз, получить тройку чисел  $1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$ ?

**588.** а) Через точку, взятую внутри произвольного тетраэдра, параллельно его ребрам проведены отрезки с концами на гранях тетраэдра. Докажите, что сумма всех шести отношений длин этих отрезков к длинам параллельных им ребер всегда равна трем.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для треугольника (на плоскости).

**589\*.** На плоскости дан набор из  $n$  векторов, длина каждого

из которых не превосходит 1. Докажите, что, заменив некоторые векторы этого набора на противоположные, можно получить такой набор  $n$  векторов, сумма которых имеет длину:

а) не превосходящую  $\sqrt{n}$ ;

б) не превосходящую  $\sqrt{2}$ .

**590\*.** а) Найдите наименьшее значение выражения  $|\cos x| + |\cos 2x|$ .

Докажите, что для любого числа  $x$  и любого натурального числа  $n$  сумма

$$|\cos x| + |\cos 2x| + |\cos 4x| + \dots + |\cos 2^n x|:$$

б) не меньше  $n/4$ ;

в) не меньше  $n/2$ .

**591.** Пусть  $p$  и  $q$  – натуральные числа такие, что

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Докажите, что число  $p$  делится на 1979.

**592.** Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне.

**593.** Внутри окружности  $\Gamma$  расположены  $n$  кругов. Докажите, что длина границы объединения этих кругов не превосходит длины окружности  $\Gamma$ , если:

а)  $n = 2$ ;

б) центры всех  $n$  кругов лежат на одном диаметре окружности  $\Gamma$ ;

в) все  $n$  кругов содержат центр окружности  $\Gamma$ .

**594.** Найдите все действительные числа  $a$ , для которых существуют действительные неотрицательные числа  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ , удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{k=1}^5 kx_k = a, \sum_{k=1}^5 k^3x_k = a^2, \sum_{k=1}^5 k^5x_k = a^3.$$

**595.** Пусть  $A$  и  $E$  – две противоположные вершины правильного восьмиугольника. В вершине  $A$  находится лягушка. Из любой вершины восьмиугольника, кроме вершины  $E$ , лягушка может прыгнуть в любую из двух соседних вершин. Попав в вершину  $E$ , лягушка останавливается и остается там. Пусть  $a_n$  – количество способов, которыми лягушка может попасть из вершины  $A$  в вершину  $E$  ровно за  $n$  прыжков.

Докажите, что

$$a_{2n-1} = 0, a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\text{где } x = 2 + \sqrt{2}, \quad y = 2 - \sqrt{2}.$$

**596.** Дана пятиугольная призма с основаниями  $A_1A_2A_3A_4A_5$  и  $B_1B_2B_3B_4B_5$ . Все ребра оснований и все отрезки  $A_iB_j$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ ) окрашены либо в красный, либо в зеленый цвет так, что в каждом треугольнике с вершинами в вершинах призмы, стороны которого окрашены, есть две стороны разного цвета. Докажите, что все десять ребер оснований окрашены одинаково.

**597<sup>+</sup>.** Положим

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

а) Докажите существование предела  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - \ln n)$ .

б) Докажите, что для любых  $n, m \in \mathbf{N}$  справедливо неравенство  $\gamma < x_n + x_m - x_{nm} \leq 1$ .

в) Найдите  $\gamma$  с точностью до 0,1.

**598.** Даны плоскость  $\pi$ , точка  $P$  на этой плоскости и точка  $Q$  вне плоскости  $\pi$ . Найдите все точки  $R$  в плоскости  $\pi$ , для которых отношение  $(QP + PR)/QR$  максимально.

**599.** а) Сколькими нулями оканчивается число  $4^{5^6} + 6^{5^4}$ ?

б) Укажите наибольшую степень числа 1979, на которую делится число  $1978^{1979^{1980}} + 1980^{1979^{1978}}$ .

**600.** Два велосипедиста едут по двум пересекающимся окружностям. Каждый едет по своей окружности с постоянной скоростью. Выехав одновременно из одной из точек их пересечения и сделав по одному обороту, велосипедисты вновь встретились в этой точке. Докажите, что на плоскости, в которой лежат окружности, существует такая неподвижная точка, расстояния от которой до велосипедистов все время равны, если они едут: а) в одном направлении (против часовой стрелки); б) в разных направлениях.

## 1980 ГОД

**601.** Докажите, что в любом треугольнике  $ABC$  середина стороны  $BC$  лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот треугольника  $ABC$  с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине  $A$ , и делит этот отрезок пополам.

0	1								
1	1		1						
2	1		2	1					
3	1		3	3	1				
4	1		4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	<u>7</u>	<u>21</u>	<u>35</u>	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Рис. 102

изойдет в бесконечном количестве строк, и постарайтесь указать все номера таких строк.

**603.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3, \\ y - \frac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

**604.** а) Андрей, Виктор, Сергей, плавающие под водой, одновременно вынырнули в точках  $A_0, B_0, C_0$  и тут же нырнули снова, причем Андрей решил проплыть за минуту треть пути до Виктора, Виктор – треть пути до Сергея, Сергей – треть пути до Андрея. Через минуту они вынырнули вновь (точки  $A_1, B_1, C_1$ ; рис. 103) и решили повторить этот маневр – уже за полминуты; потом – за четверть минуты и так далее. Где и когда они встретятся?

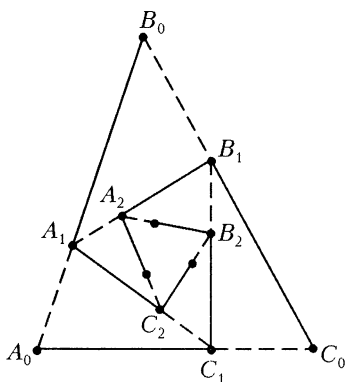


Рис. 103

б) Внутри сферы радиусом 1 км расположен миллион точек, зашумованных числами от 1 до миллиона. Каждую секунду одновременно каждая точка движется к следующей по номеру на  $1/3$  расстояния до этой точки; последняя точка точно так же движется к первой. Докажите, что через некоторое время все точки соберутся внутри сферы радиусом 1 мм.



**605.** На плоскости отмечены  $2n + 1$  различных точек. Занумеруем их числами  $1, 2, \dots, 2n + 1$  и рассмотрим следующее преобразование  $R$  плоскости: сначала делается симметрия относительно первой точки, затем — относительно второй и так далее — до  $(2n + 1)$ -й точки.

а) Покажите, что у этого преобразования  $R$  есть единственная «неподвижная точка» (точка, которая отображается в себя).

Рассмотрим всевозможные способы нумерации наших  $2n + 1$  точек (числами  $1, 2, \dots, 2n + 1$ ). Каждой такой нумерации соответствует свое преобразование плоскости  $R$  и своя неподвижная точка. Пусть  $F$  — множество неподвижных точек всех этих преобразований.

б) Укажите множество  $F$  для  $n = 1$ .

в) Какое максимальное и какое минимальное количество точек может содержать множество  $F$  при каждом  $n = 2, 3, \dots$ ?

**606.** Функция  $f$  такова, что для всех действительных  $x$

$$f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2}f(x).$$

Докажите, что  $f$  — периодическая функция.

**607.** а) Разрежьте квадрат на равнобедренные трапеции.

б) Разрежьте равнобедренный прямоугольный треугольник на равнобедренные трапеции.

в) Докажите, что любой многоугольник можно разрезать на равнобедренные трапеции.

**608.** На клетчатой бумаге (сторона клетки 1) нарисован  $n$ -угольник, все стороны которого лежат на линиях сетки и имеют нечетную длину.

а) Докажите, что  $n$  делится на 4.

б) Докажите, что при  $n = 100$  площадь этого  $n$ -угольника обязательно нечетна. Выясните, какова четность площади при других  $n$ .

**609.** а) Длины проекций выпуклого многоугольника площадью  $S$  на две взаимно перпендикулярные прямые равны  $l_1$  и  $l_2$ . Докажите, что  $S \leq l_1 l_2$ .

б) Длины проекций выпуклого многоугольника объемом  $V$  на три взаимно перпендикулярные прямые равны  $l_1, l_2$  и  $l_3$ . Докажите, что  $V \leq l_1 l_2 l_3$ .

в) Площади проекций выпуклого многогранника объемом  $V$  на три взаимно перпендикулярные плоскости равны  $S_1, S_2, S_3$ . Докажите, что  $V \leq \sqrt{S_1 S_2 S_3}$ .

**610.** Фиксируем  $k \in \mathbf{N}$ .

а) Рассмотрим множество всех наборов целых чисел  $a_1, \dots, a_k$

<u>0 0 0</u>	<u>0 0 3</u>
<u>0 0 1</u>	<u>0 1 3</u>
<u>0 1 1</u>	<u>0 2 3</u>
<u>1 1 1</u>	<u>0 3 3</u>
<u>0 0 2</u>	<u>1 1 3</u>
<u>0 1 2</u>	<u>1 2 3</u>
<u>0 2 2</u>	<u>1 3 3</u>
<u>1 1 2</u>	<u>2 2 3</u>
<u>1 2 2</u>	<u>2 3 3</u>
<u>2 2 2</u>	<u>3 3 3</u>

таких, что  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots a_k \leq k$ ; обозначим число таких наборов через  $N$ . Рассмотрим среди них те, для которых  $a_k = k$ ; пусть их число равно  $M$ . Докажите, что  $N = 2M$ .

б) Наложим на рассматриваемые наборы дополнительное ограничение: сумма  $a_1 + a_2 + \dots + a_k$  делится на  $k$ . Пусть соответствующие числа равны  $N'$  и  $M'$ . Докажите, что  $N' = 2M'$ .

(Из рисунка 104 видно, что при  $k = 3$  эти числа равны  $M = 10$ ,  $N = 20$ ;  $M' = 4$ ,  $N' = 8$ .)

Рис. 104

**611.** На хорде  $AB$  окружности с центром  $O$  берется произвольная точка  $M$ . Через точки  $A$ ,  $M$  и  $O$  проводится окружность, пересекающая первую окружность в точках  $A$  и  $C$ . Докажите, что  $MB = MC$ .

**612.** Возрастающая последовательность натуральных чисел  $\{a_n\}$  такова, что  $a_{n+1} \leq 10a_n$ . Докажите, что если все числа  $a_n$  записать рядом (без пробелов и запятых), то полученная последовательность цифр не будет периодической.

**613.** На сторонах треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построены подобные между собой треугольники  $ADB$ ,  $BEC$  и  $CFA$  ( $AD/DB = BE/EC = CF/FA = k$ ;  $\angle ADB = \angle BEC = \angle CFA = \alpha$ ). Докажите, что:

а) середины отрезков  $AC$ ,  $DC$ ,  $BC$  и  $EF$  – вершины параллелограмма;

б) у этого параллелограмма два угла имеют величину  $\alpha$ , а отношение длин сторон равно  $k$ .

**614.** Для каждого натурального  $n$  через  $S(n)$  обозначим сумму цифр всех натуральных чисел от 1 до  $n$  (в десятичной записи):

$$S(1) = 1, S(2) = 3, S(3) = 6, \dots, S(9) = 45, S(10) = 46,$$

$$S(11) = 48, S(12) = 51, \dots$$

а) Найдите  $S(100)$ .

б) Докажите, что  $S(10^k - 1) = 45k \cdot 10^{k-1}$  для всех  $k = 1, 2, \dots$

в) Докажите, что для двухзначного числа  $\overline{ab}$

$$S(\overline{ab}) = 5a^2 + ab + 41a + b(b+1) \cdot 2.$$

г) Найдите аналогичную формулу для трехзначных чисел.

д) Вычислите  $S(1980)$ .

**615.** Докажите, что периметр любого сечения треугольной пирамиды плоскостью не превосходит наибольшего из периметров ее граней.

**616.** Можно ли числа  $1, 2, \dots, 30$  разбить на группы:

- а) по пять чисел;
- б) по шесть чисел

так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?

в) При каких  $n$  и  $k$  числа  $1, 2, \dots$

$\dots, nk$  можно разбить на  $n$  групп по  $k$  чисел так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?

**617.** Внутри треугольника расположены окружности  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  одинаковых радиусов так, что каждая из окружностей  $\alpha, \beta, \gamma$  касается двух сторон треугольника и окружности  $\delta$  (рис.105). Докажите, что центр окружности  $\delta$  принадлежит прямой, проходящей через центры вписанной в данный треугольник окружности и окружности, описанной около него.

**618\*.** а) Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$  таких, что  $n!$  делится на  $n^2 + 1$ .

б) Докажите, что для любого  $\alpha > 0$  существует бесконечно много натуральных  $n$  таких, что  $[\alpha n]!$  делится на  $n^2 + 1$ .

(Здесь  $m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$ ;  $[x]$  — целая часть числа  $x$ .)

**619.** Докажите, что если для вписанного четырехугольника  $ABCD$  выполнено равенство  $CD = AD + BC$ , то биссектрисы его углов  $A$  и  $B$  пересекаются на стороне  $CD$ .

**620.** Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — действительные числа такие, что  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Докажите, что сумма модулей  $2^n$  чисел  $\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n$  (со всевозможными комбинациями знаков «+» и «-») не превосходит  $2^n$ .

**621.** Вокруг окружности описан  $n$ -угольник. Произвольная точка  $P$  внутри окружности соединена со всеми его вершинами и точками касания. Образовавшиеся  $2n$  треугольников окрашены попеременно в красный и синий цвета. Докажите, что произведение площадей красных треугольников равно произведению площадей синих треугольников.

**622.** Докажите, что количество решений уравнения  $x^3 + y^2 = z^3 + t^2 + 1$  в натуральных числах, не превосходящих  $10^6$ , меньше, чем количество решений уравнения  $x^3 + y^2 = z^3 + t^2$  в натуральных числах, не превосходящих  $10^6$ .

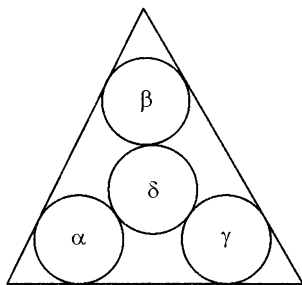


Рис.105

**623.** а) Сколько осей симметрии имеет куб? А правильная треугольная пирамида?

б) Докажите, что если некоторый многогранник имеет  $k$  осей симметрии ( $k \geq 1$ ), то  $k$  нечетно.

**624.** Найдите последовательность  $\{a_n\}$ , определяемую условиями

$$a_1 = 1, \quad 1 + \sum_d (-1)^{n/d} a_d = 0, \quad (*)$$

где сумма  $\sum$  берется по всем делителям  $d$  числа  $n$  (включая  $d = 1$  и  $d = n$ ).

Например, если  $n = p$  — простое число, то условие  $(*)$  принимает вид  $1 + (-1)^{p-1} a_1 + (-1)^p a_p = 0$ , откуда  $a_p = 2$ , если  $p = 2$ , и  $a_p = 0$ , если  $p > 2$ .

**625.** На координатной плоскости заданы четыре точки с рациональными координатами, не лежащие в вершинах параллелограмма, причем никакие три из них не принадлежат одной прямой. Разрешается проводить прямую через любые две уже полученные точки и отмечать точку пересечения любых двух проведенных прямых. Докажите, что множество точек, которые можно получить таким образом, — это множество всех точек плоскости с рациональными координатами, если: а) эти четыре точки — вершины трапеции; б) эти четыре точки — вершины произвольного четырехугольника.

**626.** Каждая сторона выпуклого четырехугольника разделена на 8 равных частей. Соответствующие точки деления на противоположных сторонах соединены друг с другом, и полученные клетки раскрашены в шахматном порядке. Докажите, что сумма площадей черных клеток равна сумме площадей белых клеток.

**627.** В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги записано натуральное число.

а) Пусть каждое из этих чисел встречается ровно один раз. (Приведите примеры такой расстановки чисел.) Докажите, что для любого заданного  $m$  найдутся две соседние (имеющие общую сторону) клетки, разность чисел в которых не меньше  $m$ .

б) Пусть каждое число  $n \in \mathbf{N}$  встречается ровно  $n$  раз (т.е. 1 — один раз, 2 — два раза и так далее). Укажите наибольшее число  $k$  такое, что обязательно найдутся две соседние клетки, разность чисел в которых не меньше  $k$ . (Приведите примеры такой расстановки, в которой разность чисел в любой паре соседних клеток не больше  $k + 1$ .)

**628.** На сфере построен треугольник, одна «сторона» которого имеет величину  $120^\circ$ . Докажите, что «медиана», опущенная

на эту «сторону», делится каждой из двух других «медиан» на две равные части. («Медианы» и «стороны» – дуги больших окружностей.)

**629\*.** а) Докажите, что число  $2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14$  делится на 27 при любом натуральном  $n$ .

б) Докажите, что если числа  $a + b$  и  $a^2 + b$  делятся на  $m$ , то  $a^n + b$  делится на  $m$  при любом  $n$  ( $a$ ,  $b$  и  $m$  – некоторые натуральные числа).

в) Докажите, что если  $f(n) = a^n + b_0 + b_1n + \dots + b_kn^k$  делится на  $m$  при  $n = 1, 2, \dots, k+1, k+2$ , то  $f(n)$  делится на  $m$  при любом  $n$  ( $a, b_0, b_1, \dots, b_k, m$  – некоторые натуральные числа).

**630.** На плоскости даны окружность  $\gamma$  и точка  $K$ . Проведем через произвольные точки  $P, Q$  окружности  $\gamma$  и точку  $K$  плоскости окружность. Пусть  $M$  – точка пересечения касательной к этой окружности в точке  $K$  с прямой  $PQ$ . Какое множество заполняют точки  $M$ ?

**631.** Двухзначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получившееся число 192021...7980 на 1980?

**632.** Груз, упакованный в контейнеры, нужно доставить на орбитальную космическую станцию «Салют». Число контейнеров не меньше 35, общая масса груза 18 тонн. Имеется семь транспортных кораблей «Прогресс», каждый из которых может доставить на орбиту 3 тонны груза. Известно, что эти корабли могут одновременно доставить любые 35 из имеющихся контейнеров. Докажите, что они смогут доставить на орбиту сразу весь имеющийся груз.

**633.** На диаметре  $AC$  некоторой окружности дана точка  $E$ . Проведите через нее хорду  $BD$  так, чтобы площадь четырехугольника  $ABCD$  была наибольшей.

**634.** Обозначим через  $S(n)$  сумму всех цифр натурального числа  $n$ .

а) Существует ли натуральное  $n$  такое, что

$$n + S(n) = 1980?$$

б) Докажите, что хотя бы одно из любых двух последовательных натуральных чисел представимо в виде  $n + S(n)$  для некоторого третьего натурального числа  $n$ .

**635.** Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один день несколько коротышек простудились и заболели, и хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки заболели, навещая своих больных дру-

зей. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно день, причем после этого у него по крайней мере еще один день есть иммунитет – т.е. он здоров и заболеть опять в этот день не может. Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делают их. Докажите, что:

а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго;

б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно кончится.

**636.** Множество  $A$  состоит из целых чисел, его наименьший элемент равен 1, а наибольший элемент равен 100. Каждый элемент  $A$ , кроме 1, равен сумме двух (возможно, равных) чисел, принадлежащих  $A$ . Укажите среди всех множеств  $A$ , удовлетворяющих этим условиям, множество с минимальным числом элементов.

**637.** Дан правильный треугольник  $ABC$ . Некоторая прямая, параллельная прямой  $AC$ , пересекает прямые  $AB$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $P$  соответственно. Точка  $D$  – центр треугольника  $PMB$ , точка  $E$  – середина отрезка  $AP$ . Определите углы треугольника  $DEC$ .

**638.** Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги окрашены в красный цвет, остальные окрашены в синий цвет, причем так, что каждый прямоугольник из 6 клеток размером  $2 \times 3$  содержит в точности две красные клетки. Сколько красных клеток может содержать прямоугольник из 99 клеток размером  $9 \times 11$ ?

**639.** В тетраэдре  $ABCD$   $AC \perp BC$  и  $AD \perp BD$ . Докажите, что косинус угла между прямыми  $AC$  и  $BD$  меньше, чем отношение  $CD/AB$ .

**640.** Число  $x \in [0; 1]$  записано в виде бесконечной дроби. Переставив ее первые 5 цифр после запятой в произвольном порядке, получим новую бесконечную дробь, отвечающую некоторому числу  $x_1$ . Переставив в десятичной записи числа  $x_1$  цифры со 2-й по 6-ю после запятой, получим десятичную запись числа  $x_2$ . Вообще, десятичная запись числа  $x_{k+1}$  получается перестановкой цифр в записи числа  $x_k$  с  $(k+1)$ -й по  $(k+5)$ -ю после запятой.

а) Докажите, что как бы ни переставлялись цифры на каждом шаге, получающаяся последовательность чисел  $x_k$  всегда имеет некоторый предел. Обозначим этот предел через  $y$ .

б) Выясните, можно ли с помощью такого процесса из рационального числа  $x$  получить иррациональное число  $y$ .

в) Придумайте такую дробь  $x$ , для которой описанный процесс всегда приводит к иррациональным числам  $y$ , каковы бы ни были перестановки пятерок цифр на каждом шаге.

**641.** Дан правильный шестиугольник  $ABCDEF$  с центром  $O$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины сторон  $CD$  и  $DE$ . Прямые  $AM$  и  $BN$  пересекаются в точке  $L$ . Докажите, что:

а) треугольник  $ABL$  и четырехугольник  $DMLN$  имеют равные площади;

б)  $\angle ALO = \angle OLN = 60^\circ$ ;

в)  $\angle OLD = 90^\circ$ .

**642.** Докажите, что каждое натуральное число представляется в виде  $a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \dots + 2^n a_n$ , где каждое из чисел  $a_k$  равно 0,  $-1$  или  $1$  и  $a_k \cdot a_{k+1} = 0$  для всех  $0 \leq k \leq n-1$ , причем такое представление единственно.

**643.** Карточки с числами  $1, 2, \dots, 32$  сложены в стопку по порядку. Разрешается снять сверху любое число карточек и вложить их между некоторыми из оставшихся или под ними, не меняя порядка тех и других, а в остальном произвольно. Эта операция называется *перемешиванием*. Докажите, что за 5 перемешиваний можно:

а) переложить карточки в обратном порядке;

б) разложить карточки в любом порядке.

в) Докажите, что не всякий порядок карточек можно получить за 4 перемешивания.

**644.** а) Докажите, что существует выпуклый 1980-угольник со сторонами длиной  $1, 2, \dots, 1980$ , все углы которого равны по величине.

б) Существует ли такой 1981-угольник?

**645\*.** В подвале три коридора (рис.106;  $OA = OB = OC = l$ ), все выходы из которых закрыты. В нем находятся инспектор Варнике и преступник. Варнике замечает преступника, если расстояние между ними не превосходит  $r$ . Он знает, что максимальная скорость преступника в два раза меньше его собственной максимальной скорости. В начальный момент инспектор находится в точке  $O$  и не видит

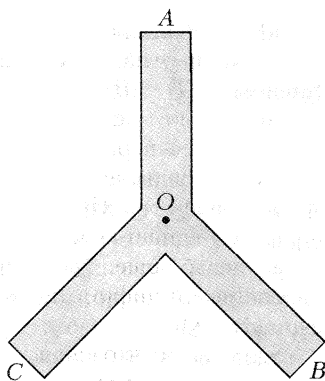


Рис. 106

преступника. Как должен действовать Варнике, чтобы наверняка поймать преступника, если: а)  $r = l/3$ ; б)  $r = l/4$ ; в)  $r > l/5$ ; г)  $r > l/7$ . Шириной коридоров и размерами людей пренебречь. (Варнике должен придумать такой план действий, чтобы, даже если преступник о нем заранее знает, он все равно не смог ускользнуть.)

**646.** От точки  $O$  на плоскости отложены  $2n$  векторов длиной 1. Они раскрашены попеременно в красный и синий цвета. Пусть  $\vec{s}$  – сумма  $n$  красных векторов,  $\vec{r}$  – сумма  $n$  синих векторов. Докажите, что  $|\vec{s} - \vec{r}| \leq 2$ .

**647.** Докажите, что при любых  $a \geq 1/2$ ,  $b \geq 1/2$  справедливо неравенство

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \frac{a + b}{2}.$$

**648.** Докажите, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то середины его сторон и основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности.

**649.** Докажите равенство

$$\frac{1}{2}c_n^2 + (c_n - c_1)^2 + (c_n - c_2)^2 + \dots + (c_n - c_{n-1})^2 = \frac{n}{2},$$

где

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1 + \frac{1}{3}, \quad c_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}, \dots, \quad c_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}.$$

**650\*.** Существует ли последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

а) натуральных чисел такая, что любое натуральное число единственным образом записывается в виде суммы нескольких ее членов:

$$a_{i_1} + \dots + a_{i_k} \quad (i_1 < \dots < i_k, k \geq 1); \quad (*)$$

б) натуральных чисел такая, что 1 не представляется в виде (\*), а любое натуральное число, большее 1, представляется в виде (\*) единственным образом;

в) целых чисел такая, что 0 не представляется в виде (\*), а любое целое число, отличное от 0, представляется в виде (\*) единственным образом;

г) целых чисел такая, что 0 и 1 не представляются в виде (\*), а любое целое число, отличное от 0 и 1, представляется в виде (\*) единственным образом?



**651.** Дама сдавала в багаж диван, чемодан, саквояж, корзину, картину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж вместе взятые, и столько же, сколько корзина, картина и картонка вместе взятые. Картина, корзина и картонка весили поровну и каждая из них больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если с ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.

**652.** Женя разрезал выпуклый картонный многогранник на грани (по ребрам) и послал этот набор граней по почте Вите. Витя склеил из всех этих граней выпуклый многогранник. Может ли случиться так, что многогранники Жени и Вити не будут равны?

**653.** Имеется линейка с двумя делениями (рис.107). С помощью линейки можно проводить произвольные прямые и откладывать отрезки определенной длины. Постройте с ее помощью:

- какой-нибудь прямой угол;
- прямую, перпендикулярную данной прямой.

**654.** Верно ли такое утверждение: из любых шести натуральных чисел можно выбрать три числа, каждые два из которых не имеют общих делителей, больших 1, или три числа, имеющие общий делитель, больший 1?

**655.** На столе у чиновника Министрства околичностей лежат  $n$  томов Британской энциклопедии, сложенных в несколько стопок. Каждый день, придя на работу, чиновник берет из каждой стопки по одному тому и складывает взятые тома в новую стопку, затем располагает стопки по количеству томов (в невозрастающем порядке) и заполняет ведомость, в которой указывает количество томов в каждой стопке (рис.108). Кроме сказанного выше, чиновник никогда ничего не делает.

- Какая запись будет сделана в

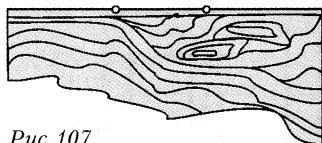


Рис.107

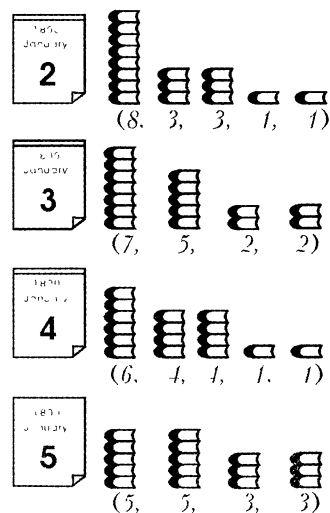


Рис.108

ведомости через месяц, если общее количество томов  $n = 3$ ,  $n = 6$ ,  $n = 10$  (начальное расположение произвольно)?

б) Докажите, что если общее число томов  $n = k(k+1)/2$ , где  $k$  – натуральное, то, начиная с некоторого дня, ведомость будет заполняться одинаковыми записями.

в) Исследуйте, что будет через много дней работы при других значениях  $n$ .

**656.** В пространстве имеются 30 ненулевых векторов. Докажите, что среди них найдутся два, угол между которыми меньше  $45^\circ$ .

**657.** В таблице  $n \times n$ , заполненной числами, все строки различны. Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице все строки также будут различны.

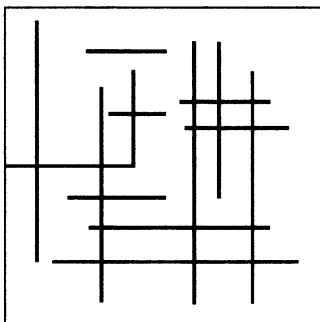


Рис. 109

**658.** В квадрате со стороной 1 проведено конечное количество отрезков (рис. 109), параллельных его сторонам. Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма длин проведенных отрезков равна 18. Докажите, что среди частей, на которые квадрат разбивается этими отрезками, найдется такая, площадь которой не меньше 0,01.

**659\*.** Докажите следующие свойства последовательности Фибоначчи ( $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 2$ , ..., ...,  $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ ):

а) Каждое натуральное число  $n \geq 3$  представляется в виде суммы различных чисел Фибоначчи.

б) Обозначим количество таких представлений числа  $n$  в виде суммы четного числа слагаемых через  $K_n$ , в виде суммы нечетного числа слагаемых – через  $H_n$ ; тогда  $|K_n - H_n| \leq 1$  при всех значениях  $n$ .

в) Если перемножить несколько подряд стоящих двучленов из последовательности  $1 - x$ ,  $1 - x^2$ ,  $1 - x^3$ ,  $1 - x^5$ , ...,  $1 - x^{f_k}$ , ... (в показателях стоят числа Фибоначчи), то в полученном многочлене все коэффициенты будут равны 0, -1 или +1.

Известное нам доказательство утверждений б) и в) опирается на такое свойство:

г) Для любого  $n \geq 3$  существует единственное представление  $n$  в виде суммы различных чисел Фибоначчи, которое вместе с

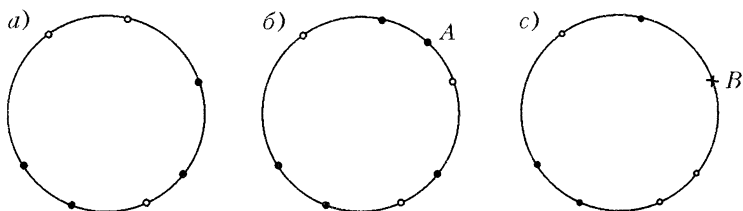


Рис. 110

каждым слагаемым  $f_k$  ( $k \geq 3$ ) содержит хотя бы одно из двух предыдущих чисел Фибоначчи  $f_{k-1}$  или  $f_{k-2}$ .

**660.** На окружности расставляются синие и красные точки (рис.110,а). Разрешается добавить одну красную точку и одновременно поменять цвет у каждой из двух соседних с ней точек (рис.110,б) либо убрать красную точку и поменять цвет у каждой из соседних точек (рис.110, в). Пусть первоначально было всего две красные точки (меньше двух точек оставлять не разрешается). Можно ли несколькими такими операциями получить на окружности:

- а) две точки – синюю и красную;
- б) 8 красных точек;
- в) одну красную и 6 синих точек;
- г) две синие точки?

## 1981 ГОД

**661.** На берегу круглого озера четыре пристани:  $K, L, P, Q$ . От пристани  $K$  отплывает катер, от  $L$  – лодка. Если катер поплывет прямо в  $P$ , а лодка – прямо в  $Q$ , то они столкнутся в некоторой точке  $X$  озера. Докажите, что если катер поплывет в  $Q$ , а лодка – в  $P$ , то они достигнут этих пристаней одновременно.

**662.** В копилке собрано четыре рубля медными монетами (по 1, 3 и 5 копеек). Докажите, что этими монетами можно заплатить три рубля без сдачи.

**663.** Найдите все простые числа  $p$ , для которых число  $2^p + p^2$  – тоже простое.

**664.** Дан четырехугольник  $ABCD$  площади  $S$ . Обозначим точки пересечения высот треугольников  $ABC, BCD, CDA, DAB$  через  $N, K, L, M$  соответственно. Докажите, что площадь четырехугольника  $NKLM$  тоже равна  $S$ .

**665.** Световое табло состоит из нескольких лампочек, каждая из которых может паходиться в двух состояниях – гореть или не

гореть. На пульте несколько кнопок, при нажатии каждой из которых одновременно меняется состояние некоторого набора лампочек (для каждой кнопки – своего). Вначале лампочки не горят

а) Докажите, что число различных узоров, которые можно получить на табло, – степень двойки.

б) Сколько различных узоров можно получить на табло, состоящем из  $m \times n$  лампочек, расположенных в форме прямоугольника, если кнопками можно переключить каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд лампочек (проверьте ваш ответ для небольших значений  $m, n$ )?

в) Придумайте другие примеры табло и наборов (переключаемых кнопок), в которых можно найти число узоров.

**666.** Докажите, что наименьшее общее кратное  $n$  натуральных чисел  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  не меньше  $na_1$ .

**667.** Постройте треугольник  $ABC$ , если заданы его наименьший угол  $A$  и отрезки длиной  $d = AB - BC$  и  $e = AC - BC$ .

**668.** Последовательность  $\{x_i\}$  определяется условиями  $x_1=1, x_2=0, x_3=2, x_{n+1}=x_{n-2}+2x_{n-1}$ . Докажите, что для любого натурального  $m$  найдутся два соседних члена этой последовательности, каждый из которых делится на  $m$ .

**669.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Докажите, что:

а) отрезок, соединяющий середины дуг  $AB$  и  $CD$ , перпендикулярен отрезку, соединяющему середины дуг  $BC$  и  $AD$ ;

б) центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABC, BCD, CDA$  и  $DAB$ , являются вершинами прямоугольника.

**670\*.** а) Даны несколько точек, некоторые пары которых соединены линиями. Точки таких пар называются *соседями*. Число соседей у каждой точки нечетно. В начальный момент все точки раскрашены в два цвета – красный и синий. Затем каждую минуту происходит одновременное перекрашивание точек по следующему правилу: каждая точка, у которой большинство соседей имеет отличный от нее цвет, меняет свой цвет; в противном случае ее цвет сохраняется. Докажите, что наступит момент, начиная с которого у некоторых точек цвет не будет меняться, а у некоторых будет меняться каждую минуту.

б) Останется ли это утверждение верным, если не предполагать, что у каждой точки число соседей нечетно?

**671.** Во вписанном четырехугольнике одна диагональ делит вторую пополам. Докажите, что квадрат длины первой диагонали равен половине суммы квадратов длин всех сторон четырехугольника.

**672.** Пусть  $a$  – натуральное число такое, что  $2^a - 2$  делится на  $a$  (например,  $a = 3$ ). Определим последовательность  $\{x_i\}$  условиями  $x_1 = a, x_{k+1} = 2^{x_k} - 1$ . Докажите, что  $2^{x_k} - 2$  делится на  $x_k$  при любом  $k$ .

**673.** На плоскости в вершинах треугольника лежат три шайбы  $A, B$  и  $C$ . Хоккеист выбирает одну из них и бьет по ней так, что она проходит между двумя другими и останавливается в какой-то точке

а) Покажите, как после пяти ударов шайба  $C$  сможет вернуться на свое место, а шайбы  $A$  и  $B$  смогут поменяться местами.

б) Могут ли все три шайбы  $A, B$  и  $C$  вернуться на свои прежние места после 25 ударов?

**674.** На сторонах  $BC, AC$  и  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$  взяты точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$  соответственно. Известно, что центр описанной около треугольника  $ABC$  окружности совпадает с точкой пересечения высот треугольника  $A_1B_1C_1$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  подобны.

**675\*.** Системой разновесов называется совокупность натуральных чисел, из которой нельзя извлечь два различных набора с одинаковой суммой (например, числа 24, 23, 22, 20, 17, 11 образуют систему разновесов, а числа 1, 2, 3, 4, 5, 8 не образуют:  $2 + 3 + 4 = 1 + 8$ ). Докажите, что из чисел, меньших 1000, можно выделить систему разновесов из:

а) 10 чисел;

б) 11 чисел.

в) Докажите, что 14 чисел из них выбрать нельзя.

г) Докажите, что если числа образуют систему разновесов, то сумма их обратных величин не превосходит  $5/2$ .

д) Выберите из чисел, меньших 700, систему разновесов из 11 чисел.

**676.** Докажите, что для любого натурального  $m$  сумма цифр числа  $1981^m$  не меньше 19.

**677.** Внутри остроугольного треугольника  $ABC$  выбрана точка  $M$ , являющаяся:

а) точкой пересечения медиан;

б) точкой пересечения биссектрис;

в) точкой пересечения высот.

Докажите, что если радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $AMB, BMC, AMC$ , равны, то треугольник  $ABC$  – правильный.

**678.**  $2m$ -значное число называется *справедливым*, если его четные разряды содержат столько же четных цифр, сколько и нечетные. Докажите, что в любом  $(2m + 1)$ -значном числе можно



г) Пусть вначале все узлы связаны кабелем, а связисты убирают по очереди по одному соединению. Игрок, нарушивший связь в схеме, проигрывает. Вопрос тот же: кто выигрывает при правильной стратегии для  $n = 4, 5, 6, 7, 8$ ? А для произвольного  $n$ ?

*Замечание.* Можно было бы рассмотреть четвертый вариант: считать, что в пункте г) игрок, нарушивший связь, выигрывает. Полное исследование этого варианта игры автору неизвестно.

**681.** а) Придумайте целые числа  $a, b, c, d$  такие, что числа  $a^2 + b^2, a^2 + b^2 + c^2, a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  — квадраты целых чисел.

б) Существует ли последовательность, состоящая из квадратов целых чисел, такая, что при любом  $n$  сумма  $n$  ее первых членов — квадрат целого числа?

**682.** Внутри треугольника  $\Delta$  нужно расположить треугольник  $\Delta_1$  так, чтобы у каждого из трех квадратов, построенных на сторонах треугольника  $\Delta_1$ , две вершины лежали на разных сторонах треугольника  $\Delta$  (рис.114).

а) Докажите, что медианы треугольника  $\Delta$  перпендикулярны сторонам треугольника  $\Delta_1$ .

б) Для любого ли остроугольного треугольника  $\Delta$  такое построение возможно?

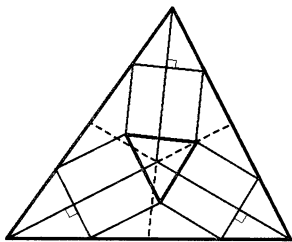


Рис. 114

**683.** Несколько кружков одного и того же размера положили на стол так, что никакие два не перекрываются. Докажите, что кружки можно раскрасить в четыре цвета так, что любые два касающихся кружка будут окрашены в разные цвета. Найдите расположение кружков, при котором трех цветов для такой раскраски недостаточно.

**684.** Двое играют в следующий вариант «морского боя». Один игрок располагает на доске  $n \times n$  некоторое количество непересекающихся «кораблей»  $n \times 1$  (быть может, ни одного). Второй игрок наносит одновременно ряд ударов по полям доски и про каждое поле получает от противника ответ — попал или промахнулся. По какому минимальному числу полей следует нанести удары, чтобы по ответу противника можно было однозначно определить расположение всех его кораблей? Рассмотрите три случая:

а)  $n = 4$ ; б)  $n = 10$ ; в)  $n$  — любое натуральное число.

**685.** Два подмножества множества натуральных чисел назовем *конгруэнтными*, если одно получается из другого сдвигом на целое число. (Например, множества четных и нечетных чисел конгруэнтны.) Можно ли разбить множество натуральных чисел на бесконечное число (непересекающихся) бесконечных конгруэнтных подмножеств?

**686.** Для любого ли числа  $x \geq 1$  верно равенство

$$\left[ \sqrt{\left[ \sqrt{x} \right]} \right] = \left[ \sqrt{\sqrt{x}} \right] ?$$

(Здесь через  $[y]$  обозначена целая часть числа  $y$ .)

**687.** а) В девятиугольной пирамиде все 9 боковых ребер и все 27 диагоналей основания окрашены: некоторые — в красный цвет, остальные — в синий. Докажите, что существуют три вершины пирамиды, служащие вершинами треугольника, все стороны которого окрашены в один и тот же цвет.

б) Верно ли аналогичное утверждение для восьмиугольной пирамиды?

**688.** Даны натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  такие, что  $a_k \leq k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Докажите, что одно из выражений  $a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$  равно нулю.

**689.** Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренных трапеций с основаниями 3 см, 1 см и высотой 1 см, нельзя составить прямоугольник.

**690\*.** а) Внутри выпуклого многоугольника площадью  $S_1$  с периметром  $P_1$  расположен выпуклый многоугольник площадью  $S_2$  с периметром  $P_2$ . Докажите неравенство

$$2 \frac{S_1}{P_1} > \frac{S_2}{P_2}.$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для выпуклых многогранников.

**691.** Будем говорить, что число обладает свойством  $(K)$ , если оно разлагается в произведение  $K$  последовательных натуральных чисел, больших 1.

а) Найдите  $K$  такое, для которого некоторое число  $N$  обладает одновременно свойствами  $(K)$  и  $(K + 2)$ .

б) Докажите, что чисел, обладающих одновременно свойствами  $(2)$  и  $(4)$ , не существует.

**692.** Точки  $C_1, A_1, B_1$  взяты, соответственно, на сторонах  $AB, BC, CA$  треугольника  $ABC$  так, что  $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1 : 3$ . Докажите, что периметр  $P$  треугольника



$ABC$  и периметр  $P_1$  треугольника  $A_1B_1C_1$  связаны неравенствами: а)  $P_1 < \frac{3}{4}P$ ; б)  $P_1 > \frac{1}{2}P$ .

**693.** В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.

**694.** В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещенным на одном (любом) ребре, прибавляется по единице. Можно ли за несколько таких шагов сделать все восемь чисел равными между собой, если вначале числа были поставлены, как на рисунке 115; как на рисунке 116; как на рисунке 117?

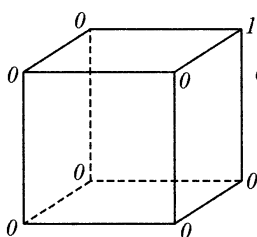


Рис.115

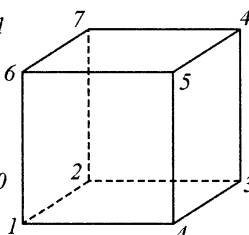


Рис.116

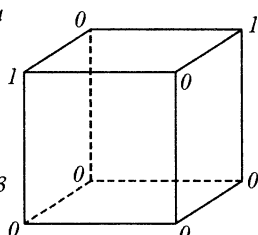


Рис.117

**695\*.** Можно ли все клетки какой-нибудь прямоугольной таблицы окрасить в белый и черный цвета так, чтобы черных и белых клеток было поровну, а в каждой строке и в каждом столбце было более  $3/4$  клеток одного цвета?

**696.** Можно ли таблицу  $10 \times 10$  клеток заполнить 100 различными натуральными числами так, чтобы для любого квадрата  $k \times k$  клеток ( $2 \leq k \leq 10$ ): а) суммы; б) произведения  $k$  чисел на его диагоналях были одинаковы?

**697.** Назовем *пузатостью* прямоугольника отношение его меньшей стороны к большей (пузатость квадрата равна 1). Докажите, что, как бы ни разрезать квадрат на прямоугольники, сумма их пузатостей будет не меньше 1.

**698.** На сторонах  $a, b, c, d$  вписанного в окружность четырехугольника «наружу» построены прямоугольники размерами  $a \times c, b \times d, c \times a, d \times b$ . Докажите, что центры этих прямоугольников являются вершинами: а) параллелограмма; б) прямоугольника.

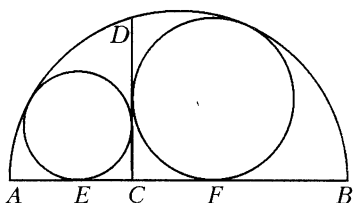


Рис.118

**699.** Полуокруг с диаметром  $AB$  разрезан отрезком  $CD$ , перпендикулярным  $AB$ , на два криволинейных треугольника  $ACD$  и  $BCD$ , в которые вписаны окружности, касающиеся  $AB$  в точках  $E$  и  $F$  (рис.118). Докажите, что:

а)  $AD = AF$ ;

б)  $DF$  — биссектриса угла  $BDC$ ;

в) величина угла  $EDF$  не зависит от выбора точки  $C$  на  $AB$ .

**700.** Можно ли множество всех конечных десятичных дробей разбить на: а) два; б) три класса так, чтобы в один класс не попали два числа с разностью  $10^m$  (ни при каком целом  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )?

**701.** Люда, Марина и Наташа нарисовали остроугольный треугольник  $LMN$ . Затем Люда построила свой треугольник, у которого длины двух сторон равны  $LM$  и  $LN$ , а угол между ними на  $60^\circ$  больше угла  $L$  в треугольнике  $LMN$ . Точно так же Марина построила свой треугольник со сторонами длины  $ML$  и  $MN$ , угол между которыми на  $60^\circ$  больше угла  $M$ , а Наташа — свой, у которого угол между сторонами  $NL$  и  $NM$  равен  $\angle N + 60^\circ$ . Докажите, что третьи (новые) стороны трех треугольников, построенных девочками, одинаковы.

**702.** Обозначим через  $S_n$  сумму первых  $n$  простых чисел:  $S_1 = 2$ ,  $S_2 = 2 + 3 = 5$ ,  $S_3 = 2 + 3 + 5 = 10$ ,  $S_4 = 17$  и так далее. Докажите, что при любом  $n$  между  $S_n$  и  $S_{n+1}$  встречается точный квадрат.

**703.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5\left(z + \frac{1}{z}\right), \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

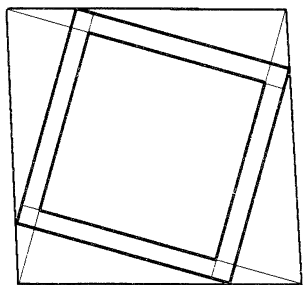


Рис.119

**704.** Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют новый квадрат (рис. 119).

**705.** На прямоугольном листе клетчатой бумаги расположены несколько прямоугольных карточек, стороны которых лежат на линиях сетки. Карточки покрывают лист в два слоя (т.е. каждую клетку листа покрывают в точности две карточки).

а) Пусть каждая карточка имеет размер  $1 \times 2$  клетки. Докажите, что можно выбрать часть карточек так, чтобы они покрывали лист в один слой. (Передвигать карточки нельзя.)

Останется ли это верным, если карточки:

б) могут иметь произвольные размеры;

в) имеют размеры  $2 \times 3$  клетки?

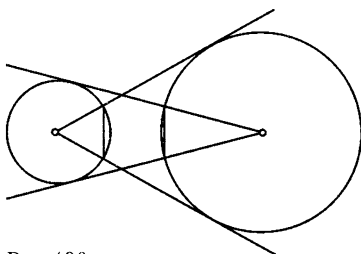


Рис.120

**706.** Из центра каждой из двух данных окружностей проведены касательные к другой окружности. Докажите, что хорды, соединяющие точки пересечения касательных с окружностями (рис.120), имеют одинаковые длины.

**707.** Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, где занимаются не менее  $2/3$  учеников этого класса.

**708.** На сторонах выпуклого четырехугольника площадью  $S$  вне его построены квадраты, центры которых служат вершинами нового четырехугольника площадью  $S_1$ . Докажите, что:

а)  $S_1 \geq 2S$ ;

б)  $S_1 = 2S$  в том и только в том случае, когда диагонали исходного четырехугольника равны по длине и взаимно перпендикулярны.

**709\*.** Пол комнаты, имеющий форму правильного шестиугольника со стороной 10, заполнен плитками, имеющими форму ромба со стороной 1 и острым углом  $60^\circ$ . Разрешается вынуть три плитки, составляющие правильный шестиугольник со стороной 1, и изменить их расположение другим (рис.121). Докажите, что:

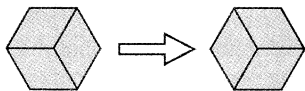


Рис.121

а) из любого расположения плиток такими операциями можно получить любое другое;

б) это можно сделать не более чем за 1000 операций;

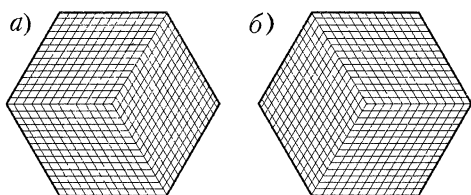


Рис.122

в) из расположения плиток рисунка 122,а нельзя получить расположение рисунка 122,б менее чем за 1000 операций.

**710\*.** Существует ли последовательность различных натуральных чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , ни один из членов которой не равен сумме нескольких других, такая, что (при всех  $n = 1, 2, \dots$ ):

а)  $a_n \leq 2(\sqrt{3})^n$ ;

б)  $a_n \leq 10 \cdot (1,5)^n$ ;

в)  $a_n \leq n^{10}$ ;

г)  $a_n \leq 1000n^{7/2}$ ;

д)  $a_n \leq 1000n^{3/2}$  ?

**711.** Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность с центром  $O$ , взаимно перпендикулярны. Докажите, что ломаная  $AOC$  делит четырехугольник на две части одной и той же площади.

**712.** Докажите, что любое положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичные записи которых содержат только цифры от 0 до 7.

**713.** Пусть  $M$  — множество точек на плоскости. Точка  $O$  плоскости называется «почти центром симметрии» множества  $M$ , если из  $M$  можно выбросить одну точку такую, что для оставшегося множества точка  $O$  является центром симметрии в обычном смысле. Сколько «почти центров симметрии» может иметь конечное множество?

**714\*.**  $N$  друзей одновременно узнали  $N$  новостей, причем каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. За один разговор можно передать сколько угодно новостей. Какое минимальное количество звонков необходимо, чтобы все узнали все новости? Рассмотрите три случая: а)  $N = 64$ ; б)  $N = 55$ ; в)  $N = 100$ .

**715\*.** Прямой угол разбит на клетки. На некоторых клетках стоят фишки, причем расположение фишек можно преобразовывать так: если для некоторой фишки соседняя сверху и соседняя справа клетки свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а

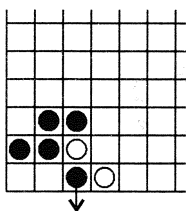


Рис. 123

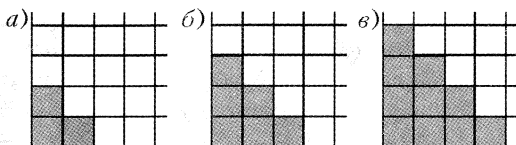


Рис. 124

старая фишка убирается (рис.123). Вначале в угловую клетку ставится одна фишка. Можно ли указанными операциями освободить от фишек уголки: а) из трех; б) из шести; в) из десяти клеток, показанные на рисунке 124?

**716.** Из точки  $P$  внутри данного треугольника  $ABC$  опускаются перпендикуляры  $PA_1$ ,  $PB_1$ ,  $PC_1$  на прямые  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$ . Для каких точек  $P$  внутри треугольника  $ABC$  величина

$$\frac{BC}{PA_1} + \frac{CA}{PB_1} + \frac{AB}{PC_1}$$

принимает наименьшее значение?

**717.** Даны натуральные числа  $n$  и  $r$ ,  $1 \leq r \leq n$ . Рассмотрим всевозможные подмножества множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , состоящие из  $r$  чисел, и в каждом выберем наименьшее число. Докажите, что среднее арифметическое всех выбранных чисел равно  $(n+1)(r+1)$ . (Например, при  $n=3$ ,  $r=2$  получаем три подмножества  $\{1, 2\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{2, 3\}$ , и среднее арифметическое равно  $(1+1+2)/3 = 4/3$ .)

**718.** Найдите наибольшее значение выражения вида  $m^2 + n^2$  для всевозможных пар  $(m; n)$  натуральных чисел таких, что  $1 \leq m \leq 1981$ ,  $1 \leq n \leq 1981$  и  $|n^2 - mn - m^2| = 1$ .

**719.** а) Для каких  $n \geq 3$  существует множество из  $n$  последовательных натуральных чисел, обладающих следующим свойством: наибольшее из этих  $n$  чисел является делителем наименьшего общего кратного остальных  $n-1$  чисел?

б) При каких  $n \geq 3$  существует единственное множество из  $n$  последовательных натуральных чисел, обладающих указанным свойством?

**720.** Про функцию  $f$ , определенную на множестве всех пар неотрицательных целых чисел  $(x; y)$ , известно следующее:

$$1) f(0; y) = y + 1, \quad 2) f(x+1; 0) = f(x; 1),$$

$$3) f(x+1; y+1) = f(x; f(x+1; y))$$

для каждой пары  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Найдите значение  $f(4; 1981)$ .

## 1982 ГОД

**721.** Каждая сторона треугольника поделена на три равные части. Точки деления служат вершинами двух треугольников, пересечение которых — шестиугольник. Найдите площадь этого шестиугольника, если площадь данного треугольника равна  $S$ .

**722.** В точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , расположенных по окружности, расставляются в некотором порядке числа  $1, 2, \dots, n$ .

а) Докажите, что сумма  $n$  модулей разностей соседних чисел не меньше  $2n - 2$ .

б) Для какого количества расстановок эта сумма равна  $2n - 2$ ?

**723\*.** Существует ли бесконечное множество натуральных чисел такое, что ни одно из чисел этого множества и никакая сумма нескольких из них не является степенью натурального числа ( $a^k$ , где  $k \geq 2$ )?

**724.** По плоскости ползут несколько черепах, скорости которых равны по величине, но различны по направлению. Докажите, что как бы черепахи ни были расположены вначале, через некоторое время они будут находиться в вершинах выпуклого многоугольника.

**725\*.** Положим  $q_n = \cos^n \frac{\pi}{7} + \cos^n \frac{3\pi}{7} + \cos^n \frac{5\pi}{7}$ . Найдите:

а)  $q_1$  и  $q_2$ ; б)  $q_3$  и  $q_4$ .

в) Докажите, что  $q_n$  — рациональное число при любом  $n$ .

**726.** Точка внутри правильного  $2n$ -угольника соединена с вершинами. Возникшие  $2n$  треугольников раскрашены попеременно в голубой и красный цвета. Докажите, что сумма площадей голубых треугольников равна сумме площадей красных:

а) для  $n = 4$ ; б) для  $n = 3$ ; в) для любого натурального  $n$ .

**727.** Докажите неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2,$$

где  $a, b, c$  — длины сторон треугольника с периметром 2.

**728.** Пусть  $A, B, C$  — вершины параллелепипеда, соседние с его вершиной  $P$ , а  $Q$  — вершина, противоположная  $P$ . Докажите, что: а) расстояния от точек  $A, B, C$  по прямой  $PQ$  могут служить длинами сторон некоторого треугольника; б) площадь  $S$  этого треугольника, объем  $V$  параллелепипеда и длина  $d$  его диагонали  $PQ$  связаны соотношением  $V = 2dS$ .

**729.** Найдите натуральное число, обладающее следующим свойством: если записать рядом его квадрат и его куб, а затем

переставить написанные цифры в обратном порядке, получится шестая степень этого числа.

**730\*.** Последовательность  $\{a_n\}$  определяется условиями  $a_1 = 0$ ,  $a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n$ . (Например,  $a_{10} = 5 - a_5 = 5 - a_4 = 5 - (2 - a_2) = 3 + (1 - a_1) = 4$ .)

а) Выпишите первые 20 членов последовательности и найдите  $a_{1982}$ .

б) Докажите, что каждое натуральное число входит в последовательность 2 или 4 раза. Сколько раз встретится в ней число  $2^k$  (при каждом  $k = 1, 2, 3, \dots$ )?

в) Докажите, что разность  $a_n - a_{n-1}$  равна 1, если в разложение числа  $n$  на простые множители число 2 входит в нечетной степени, и 0 — в противном случае.

г) Докажите, что  $a_n = \frac{n}{3}$  для бесконечного множества значений  $n$ .

д) Найдется ли  $n$  такое, что  $\left|a_n - \frac{n}{3}\right|$  больше 1982?

е) Докажите, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{3}$ .

**731.** Двое играют в такую игру: первый называет натуральное число от 2 до 9, второй умножает это число на произвольное натуральное число от 2 до 9, затем первый умножает результат на любое натуральное число от 2 до 9 и так далее; выигрывает тот, у кого впервые получится произведение больше: а) тысячи; б) миллиона. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер?

**732. а)** В треугольник  $ABC$  вписаны два разных прямоугольника так, что на основании  $AC$  лежат по две вершины каждого прямоугольника (а на сторонах  $AB$  и  $BC$  — по одной). Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь треугольника  $ABC$  и докажите, что периметр любого вписанного в треугольник  $ABC$  прямоугольника, две вершины которого лежат на  $AC$ , тоже равен 10.

б) В четырехугольник  $ABCD$  вписаны два прямоугольника с параллельными сторонами (так, что на каждой из сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  лежит по одной вершине каждого прямоугольника). Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь четырехугольника  $ABCD$  и докажите, что для любой точки на любой из сторон четырехугольника  $ABCD$  можно построить вписанный прямоугольник с вершиной в этой точке, стороны которого параллельны сторонам данного прямоугольника и периметр которого также равен 10.

**733.** а) При каких натуральных  $m$  число  $31^m - 1$  делится на  $2^m$ ?

б\*) Докажите, что для любого нечетного  $a$  и натурального  $m$  существует бесконечно много натуральных  $k$  таких, что  $a^k - 1$  делится на  $2^m$ .

в\*) Докажите, что для любого нечетного  $a$  существует лишь конечное число натуральных  $m$  таких, что  $a^m - 1$  делится на  $2^m$ .

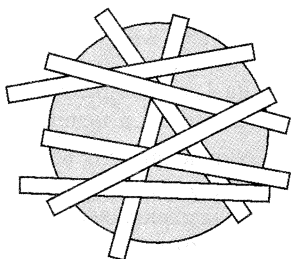


Рис. 125

**734.** Биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$  пересекает описанную вокруг него окружность в точке  $K$ . Докажите, что длина проекции отрезка  $AK$  на прямую  $AB$  (или  $AC$ ) равна сумме длин сторон  $AB$  и  $AC$ .

**735\*.** а) Докажите, что круг диаметром 1 нельзя покрыть несколькими бумажными полосами, суммарная ширина которых меньше 1 (рис. 125).

б) Назовем слоем толщиной  $h$  часть пространства, заключенную между параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии  $h$  друг от друга. Докажите, что шар диаметром 1 нельзя покрыть несколькими слоями, суммарная толщина которых меньше 1.

**736.** Медиана  $BK$  и биссектриса  $CL$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите равенство

$$\frac{PC}{PL} - \frac{AC}{BC} = 1.$$

**737.** Обозначим через  $d_k$  количество таких домов в вашем городе, в которых живет не меньше  $k$  жителей ( $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots$ ), и через  $c_m$  -- количество жителей в  $m$ -м по величине населения доме ( $c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots$ ). Докажите следующие равенства:

а)  $c_1 + c_2 + c_3 + \dots = d_1 + d_2 + d_3 + \dots$  ;

б)  $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \dots = d_1 + 3d_2 + 5d_3 + \dots + (2k-1)d_k + \dots$  ;

в)  $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots = c_1 + 3c_2 + 5c_3 + \dots + (2m-1)c_m + \dots$

**738\*.** Докажите, что: а) количество прямых различных направлений, на которые данный  $n$ -угольник дает одинаковые по величине проекции, не превосходит  $2n$ ; б) максимальное число таких прямых для любого многоугольника четно; в) для треугольника это число больше трех тогда и только тогда, когда треугольник остроугольный.



**739.** Докажите, что при любом значении  $x$ , для которого левая часть имеет смысл, выполнены следующие равенства:

$$а) \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)} = -3;$$

$$б) \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + \dots + \operatorname{tg}\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \operatorname{tg}\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)} = c_n,$$

где  $n$  — нечетное число,  $c_n$  — константа (зависящая от  $n$ ).

в) Найдите  $c_n$  для каждого нечетного  $n = 5, 7, \dots$

**740.** Сережа насыпал в цилиндрическую кастрюлю немного пшена и спросил соседку тетю Люду: «Сколько нужно налить воды, чтобы получилась вкусная каша?» — «Это очень просто, — отвечала соседка. — Наклони кастрюлю — вот так; постучи, чтобы крупа пересыпалась и закрыла ровно половину дна. Теперь заметь точку на кастрюле, ближайшую к краю, до которой поднялась крупа, — и зажми ее пальцем! До этого уровня и надо налить воду» (рис.126). — «Так ведь пшена можно насыпать побольше и поменьше, да и кастрюли бывают разные — широкие и узкие», — усомнился Сережа. — «Все равно, мой способ годится в любом случае!» — гордо ответила тетя Люда.

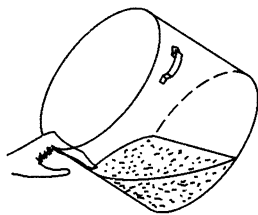


Рис. 126

а) Докажите, что тетя Люда права: отношение объемов воды и пшена по ее рецепту всегда получается одним и тем же.

б) Чему равно это отношение?

**741.** а) Найдите хотя бы одно натуральное число, которое делится на 30 и имеет ровно 30 различных делителей (включая 1 и само число).

б) Укажите все такие числа.

**742.** На: а) окружности; б) сфере радиусом 1 расположены  $n$  точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не больше  $n^2$ .

**743.** В стране  $N$  городов.

а) Между любыми двумя городами имеется прямое сообщение самолетом или паромом. Докажите, что, пользуясь лишь

каким-то одним видом транспорта, из любого города можно попасть в любой другой (быть может, с пересадками).

б) Между любыми двумя городами имеется прямое сообщение самолетом, поездом или паромом. Докажите, что можно выбрать не менее  $N/2$  городов и один из трех видов транспорта так, что, пользуясь им одним, из любого выбранного города можно попасть в любой другой выбранный город.

в) Приведите пример, доказывающий, что в утверждении б) заменить число  $N/2$  бóльшим, вообще говоря, нельзя.

**744\*.** В треугольник  $ABC$  вписан подобный ему треугольник  $A_1B_1C_1$  (вершины углов  $A_1, B_1, C_1$ , равных по величине углам  $A, B, C$ , лежат, соответственно, на отрезках  $BC, CA$  и  $AB$ ). Пусть  $A_0, B_0, C_0$  — точки пересечения прямых  $BB_1$  и  $CC_1$ ,  $AA_1$  и  $CC_1$ ,  $BB_1$  и  $AA_1$ . Докажите, что шесть окружностей, описанных около треугольников  $ABC_0, BCA_0, ACB_0, A_1B_1C_0, A_1C_1B_0, B_1C_1A_0$ , пересекаются в одной точке.

**745\*.** а) Задана последовательность чисел  $\{d_n\}$  таких, что  $|d_n| \leq 1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Докажите, что можно выбрать последовательность  $\{s_n\}$  из чисел  $+1$  и  $-1$  так, что для всех  $n$  выполняется неравенство  $|d_1s_1 + d_2s_2 + \dots + d_ns_n| \leq 1$ .

б) Задана последовательность троек чисел  $\{a_n, b_n, c_n\}$  таких, что  $a_n \leq 1, |b_n| \leq 1, |c_n| \leq 1$  и  $a_n + b_n + c_n = 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). По ней строится новая последовательность троек  $\{x_n, y_n, z_n\}$ , в которой  $x_n = y_n = z_n = 0$ , а каждая тройка  $(x_n, y_n, z_n)$  при  $n \geq 1$  получается из предыдущей  $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$  путем прибавления к  $x_{n-1}$  одного из чисел  $a_n, b_n, c_n$  по нашему выбору, к  $y_{n-1}$  — другого, к  $z_{n-1}$  — третьего. Можем ли мы всегда добиться того, что все числа  $x_n, y_n, z_n$  будут по абсолютной величине не больше 1 или хотя бы ограничены некоторой константой?

в) Выясните аналогичные вопросы для последовательностей четверок чисел.

**746.** Бумажный квадрат складывается пополам по некоторой прямой  $l$ , проходящей через его

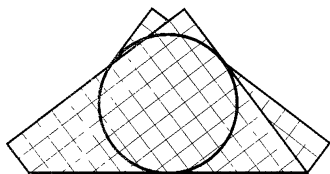


Рис. 127

центр в (невыпуклый) девятиугольник. Как нужно провести прямую  $l$ , чтобы:

а) полученный девятиугольник имел наибольшую площадь;

б\*) в нем помещалась окружность наибольшего радиуса (рис.127)?

**747.** а) Сумма  $n$  чисел равна 0, сумма их модулей равна  $a$ . Докажите, что разность между наибольшим и наименьшим из них не меньше  $2a/n$ .

б\*) Внутри выпуклого  $n$ -угольника  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  выбрана точка  $O$  так, что сумма векторов  $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$  равна нулевому вектору, а сумма их длин равна  $d$ . Докажите, что периметр этого  $n$ -угольника не меньше  $4d/n$ .

в\*) Можно ли улучшить эту оценку (при некоторых  $n$ )?

**748.** а) Можно ли разместить на плоскости конечное число парабол так, чтобы их внутренние области покрыли всю плоскость? (Внутренней областью параболы мы называем выпуклую фигуру, границей которой служит эта парабола, — см. рис.128)

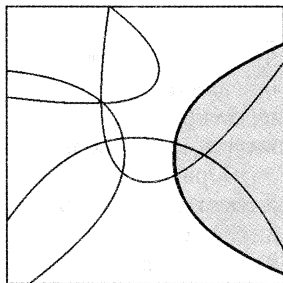


Рис. 128

б\*) В пространстве расположено несколько непересекающихся конусов. Докажите, что их нельзя переместить так, чтобы они покрыли все пространство. (Конусом мы называем здесь неограниченную выпуклую фигуру, полученную в результате вращения некоторого угла вокруг его биссектрисы.)

**749\*.** а) Докажите, что если  $x_1, x_2, x_3$  — положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \geq \frac{3}{2}.$$

При каком условии это неравенство превращается в равенство?

б) Докажите, что если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2 + x_n} + \frac{x_2}{x_3 + x_1} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_{n-2}} + \frac{x_n}{x_1 + x_{n-1}} \geq 2,$$

причем равенство возможно только при  $n = 4$ .

в) Докажите, что при  $n > 4$  неравенство пункта б) является точным в том смысле, что ни при каком  $n$  число 2 в правой части нельзя заменить на большее.

**750.** Докажите, что, как бы ни раскрасить клетки бесконечного листа клетчатой бумаги в  $N$  цветов, найдутся:

а) прямоугольник, вершины которого лежат в центрах клеток одного цвета (а стороны идут параллельно линиям сетки — по вертикальным и горизонтальным прямым; рис.129.а);

б)  $l$  горизонтальных и  $m$  вертикальных прямых, которые

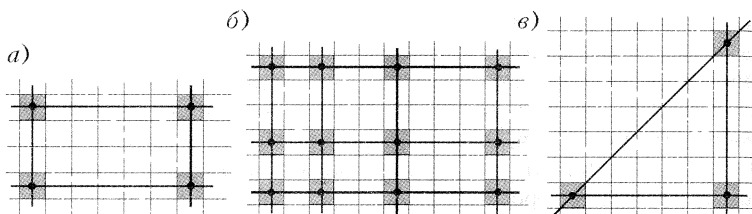


Рис. 129

пересекаются в центрах  $lm$  клеток одного цвета ( $l$  и  $m$  – любые натуральные числа; рис.129,б);

в) равнобедренный прямоугольный треугольник, вершины которого – центры клеток одного цвета, при  $N = 2$  (рис.129,в);

г\*) то же для  $N = 3$ .

**751\*.** На окружности отмечены  $3k$  точек, разделяющих ее на  $3k$  дуг, из которых  $k$  дуг имеют длину 1, еще  $k$  дуг – длину 2, и остальные  $k$  дуг – длину 3. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные.

**752.** Квадратная таблица  $n \times n$  клеток заполнена целыми числами. При этом в клетках, имеющих общую сторону, записаны числа, отличающиеся друг от друга не больше чем на 1. Докажите, что хотя бы одно число встречается в таблице:

а) не менее чем  $[n/2]$  раз ( $[a]$  – целая часть  $a$ );

б) не менее чем  $n$  раз.

**753.** Числа  $a, b, c$  лежат на интервале  $(0; \pi/2)$  и удовлетворяют следующим равенствам:  $\cos a = a$ ,  $\sin \cos b = b$ ,  $\cos \sin c = c$ . Расположите числа в порядке возрастания.

**754\*.** а) Существуют ли многочлены  $P = P(x, y, z)$ ,  $Q = Q(x, y, z)$ ,  $R = R(x, y, z)$  от переменных  $x, y, z$  такие, что выполняется тождество

$$(x - y + 1)^3 P + (y - z - 1)^3 Q + (z - 2x + 1)^3 R = 1 ?$$

б) Тот же вопрос для тождества

$$(x - y + 1)^3 P + (y - z - 1)^3 Q + (z - x + 1)^3 R = 1.$$

**755.** Внутри тетраэдра выбрана точка  $M$ . Докажите, что хотя бы одно ребро тетраэдра видно из точки  $M$  под углом, косинус которого не больше чем  $-1/3$ .

**756\*.** В стране, кроме столицы, больше 100 городов. Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами; каждый из остальных городов соединен авиалиниями ровно с 10 городами. Известно, что из любого города можно (быть может, с пересад-

ками) перелететь в любой другой. Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из любого города в любой сохранится.

**757.** Из последовательности  $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$  нетрудно выделить арифметическую прогрессию длиной 3, а именно  $1/2, 1/3, 1/6$ . Можно ли из этой последовательности выбрать арифметическую прогрессию:

а) длиной 4; б) 5; в)  $k$ , где  $k$  — любое натуральное число?

**758\*.** Какое наименьшее количество чисел можно вычеркнуть из последовательности  $1, 2, 3, \dots 1982$ , чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других оставшихся чисел?

**759.** Внутри выпуклого четырехугольника, у которого сумма шести попарных расстояний между вершинами (т.е. сумма длин всех сторон и диагоналей) равна  $S_1$ , расположен другой, для которого эта сумма равна  $S_2$ .

а) Может ли величина  $S_2$  быть больше  $S_1$ ?

б) Докажите, что  $S_2 < 4S_1/3$ .

в) Докажите, что если внутри правильного тетраэдра с суммой длин ребер  $S_1$  расположен другой, для которого эта сумма равна  $S_2$ , то  $S_2 < 4S_1/3$ .

**760.** С замкнутой ломаной  $A_1A_2 \dots A_m$ , где  $m$  нечетно, проделывается такая операция: середины ее звеньев соединяются  $m$  отрезками через одну (середина  $A_1A_2$  — с серединой  $A_3A_4$ ,  $A_2A_3$  — с  $A_4A_5$ , ...,  $A_{m-1}A_m$  — с  $A_1A_2$ ,  $A_mA_1$  — с  $A_2A_3$ ). С полученной ломаной вновь проделывается эта же операция и так далее. Докажите, что из любой  $m$ -звенной ломаной:

а) при  $m = 5$  — через 2 шага (рис.130);

б) при  $m = 7$  — через 3 шага;

в) при любом нечетном  $m$  — через некоторое (зависящее от  $m$ ) число шагов

получится ломаная, подобная (даже гомотетичная) первоначальной.

**761.** Через произвольную точку  $P$  на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  параллельно его медианам  $AK$  и  $CL$  проведены прямые, пересекающие стороны  $BC$  и  $AB$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно (рис. 131). Докажите, что медианы  $AK$  и  $CL$  делят

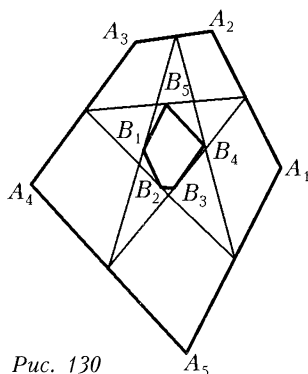


Рис. 130

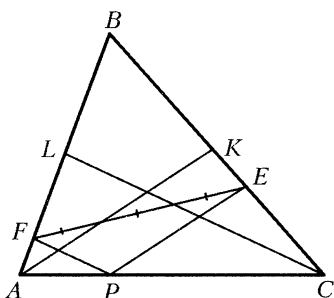


Рис. 131

отрезок  $EF$  на три одинаковые части.

**762.** Докажите, что для любых положительных чисел  $a, b, c$  выполнены неравенства

$$a + b + c \leq \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}.$$

**763\*.** Дан параллелограмм  $ABCD$ , отличный от ромба. Прямая, симметричная прямой  $AB$  относительно диагонали  $AC$ , пересекает в точке  $Q$  прямую, симметричную прямой  $DC$  относительно диагонали  $DB$  (рис. 132). Найдите отношение  $QA : QD$ , если известно отношение  $AC : BD = k$ .

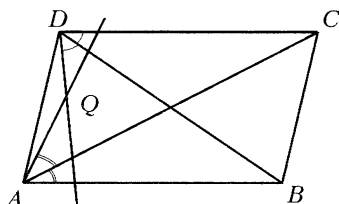


Рис. 132

**764.** Докажите, что каждое из уравнений: а)  $x^2 + y^3 = z^5$ ; б)  $x^2 + y^3 + z^5 = t^7$  имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

**765\*.** Пусть  $B$  — конечное множество точек на плоскости, не принадлежащих одной прямой.

а) Докажите, что найдутся три точки множества  $B$  такие, что проходящая через них окружность не содержит внутри себя других точек множества  $B$ .

б\*) Назовем *триангуляцией* множества  $B$  семейство треугольников с множеством вершин  $B$ , не налегающих друг на друга и в объединении дающих выпуклый многоугольник (триангуляцию множества  $B$  можно получить, соединяя его точки непересекающимися отрезками, пока это возможно). Докажите, что для любого  $B$  существует такая триангуляция, что окружность, описанная около любого треугольника этой триангуляции, не содержит внутри себя точек множества  $B$ . Укажите способ построения такой триангуляции.

в\*) Докажите, что если никакие четыре точки множества  $B$  не лежат на одной окружности, то описанная в пункте б) триангуляция единственна.

**766.** Докажите, что сумма квадратов трех последовательных целых чисел не может быть кубом натурального числа.

**767.** а) Прямая  $l$  делит площадь выпуклого многоугольника пополам (рис. 133,а). Докажите, что отношение, в котором эта прямая делит проекцию многоугольника на перпендикулярную к ней прямую, не превосходит  $1 + \sqrt{2}$ .

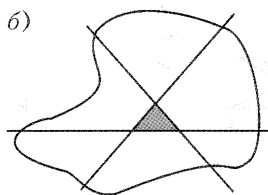
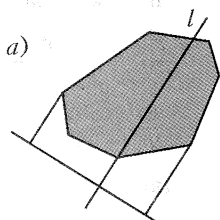


Рис. 133

б) Каждая из трех прямых делит площадь данной фигуры пополам (рис. 133,б). Докажите, что площадь части фигуры, заключенной в треугольнике между тремя прямыми, не превосходит  $1/4$  всей площади фигуры.

**768\*.** Сумма  $n$  чисел, каждое из которых не превосходит по модулю 1, равна  $s$ . Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, что сумма выбранных чисел будет отличаться от  $s/3$  не более чем на  $1/3$ .

**769\*.** Биссектрисы треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $L$ , их продолжения пересекают описанную окружность треугольника в точках  $A_1, B_1, C_1$  (рис.134). Пусть  $R$  — радиус описанной окружности,  $r$  — радиус вписанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите следующие равенства:

$$\text{а) } \frac{LA_1 \cdot LC_1}{LB} = R; \quad \text{б) } \frac{LA \cdot LC}{LB_1} = 2r; \quad \text{в) } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{2r}{R}.$$

**770\*.** В основании треугольной пирамиды  $PABC$  лежит правильный треугольник  $ABC$ . Докажите, что если углы  $PAB, PBC, PCA$  равны, то пирамида  $PABC$  — правильная.

**771.** В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AK$ . Известно, что центры окружностей: вписанной в треугольник  $ABK$  и описанной около треугольника  $ABC$  — совпадают. Найдите углы треугольника  $ABC$ .

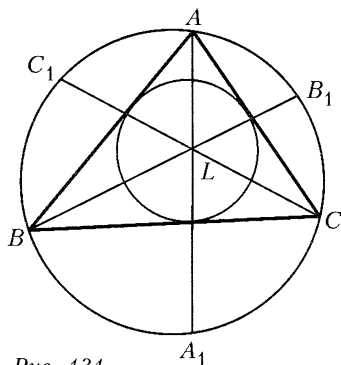


Рис. 134

**772.** В мастерской имеются пять различных станков. Обучение одного рабочего работе на одном станке стоит 1000 рублей. С какими наименьшими затратами можно обучить 8 рабочих так, чтобы при отсутствии любых трех из них все станки могли быть одновременно использованы в работе? Каждый рабочий может одновременно работать только на одном станке.

**773.** Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  в точках  $M$ ,  $N$  и  $P$  соответственно. Известно, что  $\overline{AN} + \overline{BP} + \overline{CM} = \overline{0}$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  — правильный.

**774.** Функция  $f(x)$ , определенная на отрезке  $[0; 1]$ , такова, что

$$f(0) = f(1) = 0 \quad (1)$$

и

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y) \quad (2)$$

для всех  $x, y \in [0; 1]$ . Докажите, что:

а)  $f(x) \geq 0$  при всех  $x \in [0; 1]$ ;

б)  $f(x)$  имеет бесконечно много нулей на отрезке  $[0; 1]$ ;

в) если существует такое число  $A \geq 0$ , что для всех  $x \in [0; 1/2]$  выполнено неравенство  $f(x) \leq A$ , то  $f(x) \leq A$  для каждого  $x \in [0; 1]$ ;

г\*) если функция  $f(x)$  непрерывна хотя бы в одной точке  $x_0$  отрезка  $[0; 1]$ , то  $f(x) = 0$  для всех  $x \in [0; 1]$ ;

д\*) существуют функции  $f(x)$ , удовлетворяющие условиям (1), (2), не равные тождественно нулю.

**775.** При каких натуральных  $n \geq 3$  существуют различные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  такие, что  $1 \leq a_k \leq n+1$  для любого  $k = 1, 2, \dots, n$  и все  $n$  чисел  $|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, \dots, |a_{n-1} - a_n|, |a_n - a_1|$  различны?

**776.** На диагоналях  $AC$  и  $CE$  правильного шестиугольника  $ABCDEF$  взяты точки  $M$  и  $N$  соответственно такие, что

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = \lambda.$$

Известно, что точки  $B, M$  и  $N$  лежат на одной прямой. Найдите  $\lambda$ .

**777.** Дано уравнение

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = n.$$



Докажите, что:

а) если натуральное  $n$  таково, что данное уравнение имеет целочисленное решение, то оно имеет по крайней мере три целочисленных решения;

б) при  $n = 2891$  это уравнение не имеет целочисленных решений.

**778\*.** Дан неравнобедренный треугольник  $A_1A_2A_3$ . Пусть  $a_i$  — его сторона, лежащая против вершины  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $M_i$  — середина стороны  $a_i$ ,  $T_i$  — точка касания стороны с окружностью, вписанной в данный треугольник, и  $S_i$  — точка, симметричная  $T_i$  относительно биссектрисы угла  $A_i$  треугольника. Докажите, что прямые  $M_1S_1$ ,  $M_2S_2$  и  $M_3S_3$  имеют общую точку.

**779\*.** Рассматриваются последовательности  $\{x_n\}$  положительных чисел, удовлетворяющие условию

$$1 = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$$

а) Докажите, что для любой такой последовательности  $\{x_n\}$  существует  $n$ , при котором

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3,999.$$

б) Найдите такую последовательность  $\{x_n\}$ , удовлетворяющую указанному условию, для которой при любом  $n$

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4.$$

**780\*.** Дан квадрат  $K$  со стороной 100. Пусть  $L$  — несамопересекающаяся незамкнутая ломаная, лежащая в  $K$ , такая, что для любой точки  $P$  границы квадрата  $K$  найдется точка ломаной  $L$ , расстояние которой от  $P$  не больше  $1/2$ . Докажите, что на ломаной найдутся две точки  $X$  и  $Y$ , расстояние между которыми не более 1, такие, что длина части ломаной, заключенной между ними, не меньше 198.

**1. (7–70)** Да, сможет. В каждом туре голосования сторонники президента входят лишь в те группы, в которых они побеждают.

**2. (7–70)** Возможны  $n = 3, 4, 5$ . Рассмотрите точки на сфере, являющиеся концами радиусов сферы, проведенных через центры окружностей. Эти точки образуют  $n$ -угольную пирамиду, у которой все боковые грани – равносторонние треугольники. Сумма плоских углов при вершине не больше  $360^\circ$ .

**3. (7,8 –70)** Если клетки одного цвета переводятся в клетки другого при параллельном переносе, то количество цветов может равняться: а)  $k^2 + l^2$ ; б)  $k^2 + kl + l^2$  ( $k, l$  – натуральные).

**4. (8–70)** Если точки  $C$  удовлетворяет условию, то из точки  $E$ , полученной из  $C$  параллельным переносом на вектор  $AB$ , отрезок  $AB$  виден под углом  $30^\circ$  либо  $150^\circ$ .

**6. (9–70)** Существуют 132 положения.

**7. (9–70)** Введите обозначения  $b + c - a = x$ ,  $c + a - b = y$ ,  $a + b - c = z$  и воспользуйтесь неравенством  $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2$ .

**8. (10–70)** Рассмотрите (начиная с завершающей стадии игры) для каждого состояния игры: сколько осталось спичек, четное ли у начинающего число спичек, чей ход – является ли это состояние проигрышным или выигрышным.

**9. (10–70)** Такой тетраэдр можно получить из «развертки» – остроугольного треугольника, сложив его по средним линиям, или из прямоугольного параллелепипеда, взяв 4 его несмежные вершины.

**10. (10–70)** Если это не так, то каждый круг покрывает точку пересечения диагоналей.

**11. (11,12–70)** Занумеруйте все деревья по часовой стрелке. Рассмотрите, как изменяет перелет двух чижей сумму номеров деревьев, занятых чижами.

**12. (11–70)** Этим свойством обладают только трапеция и параллелограмм.

**13. (11–70)** Числа можно считать расположенными в порядке возрастания на числовой прямой. Оцените, сколько раз входит в сумму каждый отрезок между соседними числами.

**14. (11–70)** Соединив точки касания с вершинами граней, получаем, что треугольники, имеющие общую сторону – ребро многогранника, равны.

**15. (11–70)** Сравните этот результат с теоремой Холла о различных представителях (см. статью М.Башмакова «Паросочетания и транспортные сети»; 4–70). Рассмотрим двудольный граф (т.е. граф из белых и черных вершин, в котором ребра соединяют некоторые пары вершин разного цвета). Тогда, для того чтобы из всех белых вершин можно было провести ребра в разные черные вершины, (необходимо и) достаточно, чтобы ребра из любых  $k$  белых вершин ( $k \geq 1$ ) шли не менее чем в  $k$  разные черные вершины.

**16. (12–70)** Если  $p(c) = 1$ , а  $p(a) = 0$ , то  $p(c) - p(a)$  делится на  $(c - a)$  и, следовательно,  $c = \pm 1$ .

**17. (12–70)** Первый путь больше 10 верст; второй – напрямик – меньше.

**18. (12–70)** а) Пусть  $M$  лежит на дуге  $AB$ . Точка  $K$ , полученная из  $M$  поворотом вокруг  $A$  на  $60^\circ$ , лежит на отрезке  $CM$ . б) Запишите квадраты расстояний от точки  $M$  до центров окружностей  $\gamma_i$ , выраженные через углы  $MOC_i$ , где  $O$  – центр окружности  $\gamma$ , содержащей  $M$ ,  $C_i$  – центр  $\gamma_i$  (разности между этими углами кратны  $120^\circ$ ).

**19. (12–70, 8–71)** В момент времени  $t = 2^k$  возбуждены только две клетки. В момент  $2^k + t$  возбуждено вдвое больше клеток, чем в момент  $t$ ,  $0 \leq t < 2^k$ . Ответ в общем виде выражается через число единиц в двоичной записи момента времени  $t$ .

**20. (12–70)** Можно. Отсекая три угла, можно получить правильный шестиугольник, из которого такими же отсечениями получается цепочка правильных  $3 \cdot 2^n$ -угольников.

**21. (2–71)** Рассмотрите сумму проекций окружностей на одну из сторон квадрата. Эта сумма равна сумме диаметров, а следовательно, больше 3.

**22. (2–71)** а) Покажите, что  $A_1T_1 + A_1T_2 = K_1L_1 = K_2L_2$  (где  $K_1$  и  $L_1$  – точки касания на одной стороне угла,  $K_2$  и  $L_2$  – на другой); б)  $K_1Q \cdot K_1L_2 = K_1K_2^2 = L_1L_2^2 = L_2P \cdot L_2K_1$  (где  $P$  и  $Q$  – точки пересечения  $K_1L_2$  с окружностями).

**23. (2–71)** Воспользуйтесь неравенством  $\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} < 1$ .

Доказательство по индукции обсуждается в статье Е.Николаева «Случай с методом математической индукции» 7–70.

**24. (2–71)** Чтобы применить индукцию, рассмотрите замену несократимой дроби  $m/n$  на  $(1 + k/n)/d$ , где  $n = md - k$ .

**25. (2–71)** Вместе с двумя подмножествами выбрано и пересечение. Среди подмножеств не могут одновременно присутствовать два непересекающихся, дающих в объединении все множество из  $n$  элементов.

**26. (3–71)**  $f(x, y) = 5x + 60(y - 1970) - 4$ .

**27. (3–71)** Умножьте первую сумму на  $(a - b)^{-1} + (b - c)^{-1} + (c - a)^{-1}$ .

**28. (3,4–71)** Исследуйте, для какого числа шаров можно выделить один и два радиоактивных за  $n$  проверок,  $n = 2, 3, \dots, 8$ .

**29. (4–71)** Монета, покотившаяся по дуге  $\alpha$  неподвижной монеты, поворачивается на угол  $\alpha(1 + 1/k)$  ( $k$  – отношение радиусов монет). Рассмотрев сумму внешних углов, необходимо вычесть сумму одинаковых углов в углублениях.

**30. (4–71)** Воспользуйтесь тем, что два пересекающихся круга можно накрыть кругом, диаметр которого не больше суммы диаметров исходных кругов.

**31. (5–71)** Нужно сделать 1699 разрезов. Проследите, как может изменяться общее число вершин после каждого разреза, и сравните с минимальным числом вершин у окончательного набора многоугольников.

**32. (5–71)** Количество минусов в таблице равно  $x(100 - y) + y(100 - x)$ , где  $x$  и  $y$  – количество строк и столбцов соответственно, в которых знак менялся нечетное число раз. Из равенства  $x(100 - y) + y(100 - x) = 1970$  получаем  $(x - 50)(y - 50) = 15 \cdot 101$ , но 101 – простое.

**33. (5–71)** Воспользуйтесь тем, что при нечетном  $k$  остаток от деления  $2^n$  на  $2^l k$  не меньше  $2^l$ . Можно доказать, что сумма остатков больше  $\frac{n(\log_2 n - 4)}{2}$ .

**34. (6–71)** Если число имеет более 12 знаков, то убираем первую цифру, прибавляя ее же на 12 разрядов ниже; полученное число меньше, а ненулевых цифр не больше. Для чисел, у которых менее 12 цифр, утверждение задачи очевидно.

**35. (6–71)** Если это не так, то многогранник лежит внутри сферы радиусом 11, а следовательно, каждая его грань, находясь между двух сфер, имеет площадь не больше площади круга радиусом  $\sqrt{21}$ .

**36. (6–71)** Покажите, что каждые две из данных точек лежат на одной из данных прямых, а каждые две из данных прямых пересекаются в одной из данных точек.

**37. (6–71)** Если в некотором прямоугольнике сумма больше  $4 + \varepsilon$ , то можно найти такой, в котором она больше  $4 + 3\varepsilon$ .

**38. (6–71)** Точка  $L$  – центр прямоугольника  $AKDM$ .

**39. (7–71)** Если  $(x, y)$  – решение уравнения  $x^2 - 3xy + y^2 = 1$ , то  $((y, 3y - x)$  и  $(3x - y, x)$  – тоже решения.

**40. (7–71)** а)  $C_{n+2}^3 = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$ ;

б)  $(k!)^2 C_{n+k+1}^{2k+1} = \frac{(n+k+1)!(k!)^2}{(2k+1)!(n-k)!}$ .

**41. (7–71)** Восставьте перпендикуляр к  $AB$  из середины  $CB$ .

**42. (7–71)** Доказательство по индукции для  $(4n+1)$ -значных чисел.

**43. (7–71)** Возможно  $n^2 - n + 1$  треугольников. Для доказательства раскрасьте треугольнички в шахматном порядке.

**44. (7–71)** Рассмотрите число  $T = 999 \dots 99$  из  $n$  девяток, где  $n$  больше числа значащих цифр числа  $K$ .

**45. (7,8–71)** Если утверждение верно для  $n = a$  и  $n = b$ , то оно верно и для  $n = ab$ .

**46. (7–71)** Две, одна или ни одной.

**47. (7–71)** Рассмотрите количество пар одинаковых цифр, стоящих в одном разряде.

**48. (7–71)** Можно показать, что с точностью до подобия существует лишь один такой треугольник, а затем найти косинус угла  $BAC$ .

**49. (7–71)** Из того, что  $10^5 A$  и  $A$  при любом целом  $A$  дают одинаковые остатки при делении на 11111, можно показать, что полученное 444445-значное число делится на 11111.

**50. (8–71)** Пусть  $\varphi$  – координата точки на окружности (определяемая с точностью до прибавления  $2\pi k$ , где  $k$  целое). Рассмотрите отображение  $\varphi \rightarrow m\varphi$  ( $m$  – натуральное).

**51. (8–71)** Так как  $abc = 1$ , то  $(a-1)(b-1)(c-1) = a + b + c - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} > 0$ .

**52. (8–71)** Рассмотрите для упорядоченных по длине пяти отрезков три тройки соседних. Из трех соответствующих неравенств  $a_{i+1}^2 \geq a_i^2 + a_{i-1}^2$  можно получить, что  $a_5 > a_1 + a_2$ .

**53. (8–71)** Середина стороны одинаково удалена от точек касания этой стороны со вписанной и невписанной окружностями.

**54. (8–71)** Покажите, что взаимно перпендикулярны отрезки, соединяющие противоположные точки пересечения.

**55. (8–71)** Доказательство можно получить индукцией по  $n$ .

**56. (8–71)** Если бы это произошло, то за два шага до этого цифры должны были бы чередоваться.

**57. (8–71)** Если  $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ , где  $p_i$  – простые, то число  $N$  имеет  $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_m + 1)$  делителей. Далее остается рассмотреть разложения чисел 14, 15, 17 на множители.

**58. (8–71)** Если треугольник  $ABC$  построен, то точки  $A_1$  и  $A_2$ , полученные из  $A$  симметрией относительно двух биссектрис, не содержащих  $A$ , лежат на прямой, проходящей через точки  $B$  и  $C$ .

**59. (8–71)** Тогда и только тогда, когда  $n(n+1)$  делится на 3.

**60. (8–71)** К первой группе относим те числа, в записи которых четное число единиц, а ко второй – числа с нечетным числом единиц. Любые два числа в каждой группе отличаются не менее чем в двух разрядах.

**61. (9–71)** Первый может обеспечить разницу не менее 32, а второй – не более 32.

**62. (9–71)** Рассмотрите остатки от деления на  $a$  набора чисел  $2^i - 1$  при  $i$ , меняющемся от 0 до  $a$ .

**63. (9–71)** Если нет «швов», то каждая из десяти прямых, разрезающих квадрат на клетки  $1 \times 1$ , пересекает по две плитки, но всего плиток только 18.

**64. (10–71)** Если окружность, построенная на диаметре  $PQ$ , не пересекает прямую, то рассмотрим окружность, проходящую через  $P$  и  $Q$  и касающуюся прямой  $l$ ; точка касания – искомая точка  $M$ .

**65. (10–71)** а) Отношение площадей треугольников равно отношению высот в случае равных оснований и отношению оснований в случае равных высот. Искомое отношение равно  $\frac{(1-k)^3}{1-k^3}$ . б) Берутся прямые из пункта а) при  $k = 2$  и через вершины маленького треугольника проводятся еще три прямые, соответственно параллельные первым трем.

**66. (10–71)** Набор  $k + (k-1) = 2k-1$  искомым числам начинается с  $2k^2 - 3k + 1$ .

**67. (10–71)** Золота мастеру добавлять не придется.

**69. (10–71)** Для любого числа  $n > 1$  существуют ровно два  $n$ -значных числа  $A$  (кроме 000...00 и 000...01), которые обеспечивают положительный ответ на вопрос пункта в). Для определения очередной цифры получается линейное диофантово уравнение.

**70. (11–71)** Фактически надо найти точку, которая после  $n$  последовательных проектирований на  $n$  прямых переходит в себя. Если прямую считать числовой, то проектирование одной прямой на другую оказывается сжимающим линейным отображением, а серия таких отображений сводит поиск точки к решению уравнения  $x = ax + b$ , где  $a < 1$ .

**71. (11–71)** Сравните  $k$ -е по величине числа двух столбцов в таблице, по строкам которой числа возрастают. Во втором случае получится другая таблица.

**72. (11–71)** Возведение в куб и подстановка первоначального уравнения позволяет получить корни, но при этом появляются посторонние решения. Проверка корней с помощью подстановки затруднительна. Решение можно упростить с помощью замены переменных.

**73. (11–71)** Вероятность угадать  $k$  клеток равна  $\frac{C_8^k \cdot C_{56}^{8-k}}{C_{64}^8}$ .

**74. (12–71)** Легко проверяется, что после подстановки  $y = x - a/2$  коэффициенты при нечетных степенях  $y$  равны 0.

**75. (12–71)** Утверждение пункта г) можно доказать индукцией по длине пути из  $A$  в  $B$ .

**76. (12–71)** Если  $A$  и  $B$  знакомы, а  $M_A$  и  $M_B$  – множества знакомых  $A$  и  $B$  соответственно, то (1)  $M_A$  и  $M_B$  не имеют общих элементов, (2) каждый из  $M_A$  имеет ровно одного знакомого в  $M_B$  и (3) каждый из  $M_B$  имеет ровно одного знакомого в  $M_A$ .

**77. (1–72)** Воспользуйтесь тем, что отношение отрезков, на которые биссектриса делит основание треугольника, равно отношению боковых сторон.

**78. (1–72)** Достаточно произвести подстановку  $y = s - x$  и рассмотреть изменение суммы при  $x$ , меняющемся от 0 до  $s$ , и фиксированном  $s$ .

**79. (1–72)** Рассмотрите момент, когда обе точки находятся на равных расстояниях от точки пересечения прямых. Перпендикуляры, восставленные из наблюдаемых точек, пересекаются в искомой точке.

**80. (1–72)** Изменение знака только в тех столбцах и строках, сумма чисел в которых отрицательна, увеличивает общую сумму чисел таблицы, а она ограничена.

**81. (1–72)** Если квадрат повернуть на  $90^\circ$  вокруг центра, то прямые  $A_iP$  перейдут в соответствующие перпендикуляры.

**82. (1–72)** Доказательство по индукции использует тот факт, что найдется машина, бензина в которой хватает, чтобы доехать до следующей машины.

**83. (1–72)** Доказательство можно получить на основе постулата Бертрана – теоремы о том, что для любого натурального  $n > 1$  между  $n$  и  $2n$  содержится хотя бы одно простое число.

**84. (2–72)** Одно из решений использует симметричное отражение точек  $P$ ,  $M$ ,  $Q$  относительно диаметра, проходящего через точку  $A$ .

**85. (2–72)** См. статью Л. Камнева «Иррациональность суммы радикалов». При  $n > 4$  помогает индукция по числу простых множителей подкоренных натуральных чисел.

**86. (2–72)** Расчертите дно коробки на квадратики  $1 \times 1$  и отметьте черным цветом те клетки, которые находятся одновременно в нечетной строке и нечетном столбце. Посмотрите, сколько черных клеток оказывается в каждом прямоугольнике.

**87. (2–72)** Рассмотрите середины трех хорд, соединяющих общую точку трех окружностей с тремя другими точками пересечения. Треугольник с вершинами в точках попарного пересечения окружностей равен треугольнику, вершинами которого являются центры этих окружностей.

**88. (2–72)** Условие таково:  $c = \frac{ab}{3} - \frac{2a^3}{27}$ .

**89. (3–72)** Рассмотрите многоугольник с наименьшим числом сторон, полученный продолжением сторон данного многоугольника  $M$ , содержащий  $M$ .

**90. (3–72)** Рассмотрите отдельно слагаемые с  $x_i$  меньшими  $n$  и большими  $n$ .

**91. (3–72)** См. статью А. Савина «Окружение десанта». Даже когда второй ставит по одному нулю, он выигрывает.

**93. (3–72)** Перемножив все слагаемые, можно увидеть, что количество « $-1$ » не может быть нечетным, а количество « $+1$ » равно количеству « $-1$ ».

**94. (3–72)** Предположим, что такой многогранник существует. Рассматривая углы при вершинах, получаем, что в среднем они меньше  $90^\circ$ ; рассматривая же углы граней, получаем, что среднее значение угла больше  $90^\circ$ .

**95. (3–72)** Можно воспользоваться тем, что середины сторон, середина средней линии и точка пересечения боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.

**96. (4–72)** Покажите, что

$$(a_1 + a_2 + a_5 - a_3 - a_4)(a_1 + a_3 + a_4 - a_2 - a_5) \leq a_1^2.$$

**97. (4–72)** Последовательность стремится к  $b/3$ , не являясь монотонной.



**98. (4–72)** Можно показать, что остаток от деления на 2 у последних четырех чисел строк повторяется с периодом 4. Уже в следующей строке (из 9 чисел) ни одно число не делится на 3.

**99. (4–72)** Для любых точек  $A, B, C, M$  плоскости  $AC \cdot BM \leq AB \cdot CM + BC \cdot AM$ .

**100. (4–72)** Воспользуйтесь тем, что эти числа – корни многочлена 45-й степени, связанного с выражением  $\operatorname{tg} 45x$  через  $\operatorname{tg} x$ .

**101. (5–72)** Количество бактерий через  $t$  минут равно  $2^t(n-t)$ .

**102. (5–72)** Рассмотрев две точки, расстояние между которыми наибольшее, и соответствующую им третью точку, можно показать, что множество содержит только три точки.

**103. (5–72)** Удобно ввести переменные  $x + y = u, x - y = v$ . Решения есть при  $-a \leq b\sqrt{3}/2 \leq a$ .

**104. (5–72)** Решение может быть получено с помощью теоремы синусов.

**105. (5–72)** Для функции  $s(n)$  – суммы цифр числа  $n$  – верны неравенства  $s(a+b) \leq s(a) + s(b)$  и  $s(ab) \leq s(a)s(b)$ . Оценка  $c_k$  существует, если  $k = 2^q \cdot 5^r$ .

**106. (6–72)** Рассмотрите значение трехчленов в точке пересечения графиков.

**107. (6–72)** Заметьте, что  $\frac{A_i B_i}{D_{i+1} A_{i+1}} = \frac{S_{A_i B_i O}}{S_{D_{i+1} A_{i+1} O}}$ .

**108. (7–72)** Если две точки делят периметр пополам, то радиусы окружностей, проведенные в эти точки, делят площадь многоугольника пополам.

**109. (7–72)** в) Рассмотрите четность количества плюсов в каждой из трех следующих групп вершин: 1, 4, 7, 10; 2, 5, 6, 11; 3, 6, 9, 12. Сходные соображения используются и при решении пунктов а) и б).

**110. (8–72)** Возьмите квадрат со стороной  $2^n$ , содержащий все черные клетки. Разделив квадрат на четыре равных квадрата, отбрасываем те, которые не содержат черных клеток. Каждый из оставленных делим еще раз, если в нем меньше  $1/5$  черных клеток.

**111. (8–72)** Рассмотрите две фигуры, полученные из исходной сдвигом на 0,001 в направлениях, составляющих  $60^\circ$ .

**112. (8–72)** Числа в клетках  $(i, j)$  таблицы имеют вид  $x_i + y_j$ , где можно считать сумму всех  $x_i$  равной 0. Утверждение можно доказать по индукции.

**113. (8–72)** Разные  $n$ -значные числа, составленные из цифр 1 и 2, дают разные остатки при делении на  $2^n$ .

**114. (8–72)** Каждая перестановка увеличивает сумму парных произведений соседних чисел  $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1$ .

**115. (8–72)** Если объемы удовлетворяют соотношению  $1 = a \leq b \leq c$ , то, используя разложение  $b$  по степеням двойки, можно освободить второй сосуд, переливая из второго и третьего в первый. Если  $a$  больше единицы, то можно перейти к новой единице.

**116. (8–72)** Проведите диагонали, соединяющие вершины через одну, и рассмотрите возникшие треугольники.

**117. (8–72)** Рассмотрим отрезки времени, в течение которых каждый наблюдатель следит за улиткой; они покрывают отрезок  $\Delta$  длиной  $t$ . Из покрытия отрезка  $\Delta$  несколькими отрезками можно выбрать такое, которое покрывает  $\Delta$  не более чем в два слоя. Отсюда получаем оценку  $t$ .

**118. (8–72)** Когда  $n - 1$  не кратно 4, в кайме можно выбрать несколько непересекающихся подмножеств, при переходах между которыми приходится пользоваться клетками из дополнения, число которых меньше, чем число этих подмножеств.

**119. (8–72)** Воспользуйтесь тем, что многоугольник площадью  $S$ , плоскость которого образует угол  $\alpha$  с плоскостью  $\pi$ , при проектировании на эту плоскость переходит в многоугольник площадью  $S \cos \alpha$ .

**120. (8–72)** Подставьте в свойство 1)  $b = a$ .

**121. (8–72)** Можно воспользоваться тем, что среднее  $n$  чисел не может быть больше всех средних в нескольких подмножествах, на которые разбито множество  $n$  чисел.

**122. (8–72)** Если  $P, Q, M$  – три точки на окружности радиусом  $R$ , то расстояние от точки  $M$  до прямой  $PQ$  равно  $2R \sin\left(\overset{\circ}{PM}/2\right) \sin\left(\overset{\circ}{QM}/2\right)$ . Искомое расстояние равно  $pr/q$ .

**123. (9–72)** Доказать, что нет решений, кроме  $m = 1, 2, 3$  и 4, можно с помощью постулата Бертрана (см. указание к задаче 83).

**124. (9–72)** Можно использовать площади или барицентрические координаты.

**125. (9–72)** а) Нет; б) 6 (пример: 2, 3, 5, 7, 107, 10693); в) 5.

**126. (10–72)** Используйте формулу  $S = pr$ , где  $S$  – площадь,  $p$  – полупериметр,  $r$  – радиус вписанной окружности.

**127. (10–72)** Особых чисел бесконечно много. Можно использовать принцип Дирихле и тот факт, что для некоторого  $N$  существует сколь угодно много чисел  $n \leq N$ , для которых  $n + s(n) > N$ .

**128. (10–72)** Отношение равно  $5 : 10 : 13$ .

**129. (11–72)** Числа  $a$  и  $b$  должны делиться на одинаковую степень числа 2. После любых переливаний в каждом сосуде содержится  $ma + nb$  литров молока ( $m$  и  $n$  – целые).

**130. (11–72)** а) 4; б) 8. Рассмотрите выпуклую оболочку  $V$  данных точек, параллельные переносы, переводящие одну из точек, скажем  $A$ , в остальные, и гомотетичный образ  $V$  с центром  $A$  и коэффициентом 2.

**131. (11–72)** Выразите угол между биссектрисами через дуги, на которые вершины и точки пересечения с биссектрисами делят окружность.

**132. (11–72)** а) Рассмотрите  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$ ; б) нет.

**133. (11–72)** Этот факт следует из формулы Эйлера.

**134. (11–72)** Шестиугольник, вершины которого делят стороны треугольника  $ABC$  на три равные части.

**135. (12–72)**  $c_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ . Докажите, что  $\sin nx = \sin x \cdot P_{n-1}(\cos x)$ , где  $P_{n-1}$  – многочлен степени  $n - 1$ .

**136. (12–72)** Нет. Рассмотрите 8 самых легких камней.

**137. (12–72)** а), б) Разрежьте четырехугольник диагональю  $AC$  на два треугольника и – в задаче б) – симметрично отразите один из них (так, что  $A$  и  $C$  поменяются местами).

**138. (12–72)** Воспользуйтесь индукцией и равенством  $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ .

**139. (12–72)** Опустим перпендикуляр  $DP$  на сторону  $BC$ . Тогда искомое расстояние равно  $PH = \sqrt{b^2 - a^2}$ .

**140. (12–72)** Удобнее следить за обратными переходами; докажите, что из любого четного числа, большего 4, с их помощью можно получить меньшее четное число.

**141. (1–73)** Отрезок, проведенный через точку  $P$  параллельно  $AC$ , с концами на прямых  $HM$  и  $HN$ , делится точкой  $P$  пополам.

**142. (1–73)** а) Подсчитайте сумму «по ребрам» и «по вершинам»; б) да.

**143. (1–73)** Наименьшее  $n = 1806$ .

**144. (1–73)** См. статью А. Колотова «Об одном разбиении прямоугольника». Условия таковы: каждое из чисел  $\alpha$  и  $\beta$  должно быть в целое число раз меньше хотя бы одного из чисел  $a$  и  $b$ , а каждое из чисел  $a$  и  $b$  должно иметь вид  $\alpha m + \beta n$ , где  $m, n$  – целые неотрицательные числа. Удобно использовать диагональную раскраску в несколько цветов (для рационального отношения  $\alpha/\beta$ ).

**145. (1–73)** Предположив противное, получим, что в среднем (за период, а значит – за первые  $N$  дней при  $N \rightarrow \infty$ ) будет уплачено рациональное число рублей.

**146. (2–73)** Утверждение неверно только для  $n = 3, 4, 6, 8$ . Полезно рассмотреть две соседние фишки одного цвета.

**147. (2–73)** Эти условия эквивалентны такому:  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ .

**148. (2–73)**  $x_n = \frac{\lambda^n}{n!}$  (независимо от  $\alpha$  и  $\beta$ ).

**149. (2–73)** Докажите, что если  $AO \geq OC$  и  $BO \geq OD$ , то периметр  $\triangle AOB$  не меньше, чем периметр  $\triangle COD$ .

**150. (2–73)** Можно индукцией по  $n$  доказать, что если  $|P| \geq k^{n-1}$ , то  $|P| + (k-1)|Q| \leq k^n$  (где  $|X|$  – число элементов в множестве  $X$ ).

**151. (3–73)** Прямые проходят через одну из четырех точек, лежащих на осях симметрии. Поэтому утверждение следует из принципа Дирихле.

**152. (3–73)** Воспользуйтесь тем, что при нечетном  $k$  число  $a^{nk} + b^{nk}$  делится на  $a^n + b^n$ .

**153. (3–73)** Стратегия первого: он должен называть цифры 4 или (если разность чисел при замене \* на 0 была бы отрицательной) 5 до тех пор, пока второй не поставит цифру в старший разряд, а дальше – цифры 0 или 9 (в зависимости от того, в каком числе заполнен старший разряд).

**155. (4–73)** См. статью Н.Васильева и Г.Гальперина «Упаковка квадратов». Один из способов – укладывать квадраты по порядку, начиная с наибольшего, слоями (когда очередной квадрат не помещается в заполняемую «полку», начинается заполнение следующей).

**156. (4–73)** Рассмотрите точку  $K$  на  $NQ$  такую, что  $NK = KM$ , или используйте свойство биссектрисы для треугольника  $QNM$ .

**157. (4–73)** Наименьшее  $S = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ .

**158. (4–73)** Предположив противное, рассмотрите самую верхнюю строку, в которой есть равные числа.

**159. (4–73)** Нет.

**160. (5–73)** Это – теорема из линейной алгебры: если

$a_{ij} = -a_{ji}$  и система  $\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i = 0$  имеет только нулевое решение,

то  $n$  четно (над полем  $F_2 = \{0, 1\}$  остатков по модулю 2). Ее

можно доказать индукцией (от  $n - 2$  к  $n$ ) или с помощью определителей.

**161. (5–73)** Рассмотрите пересечение полуплоскостей, образуемых  $n$  прямыми, идущими по сторонам.

**162. (5–73)** Посчитайте количество чисел, представимых первыми  $n$  членами последовательности.

**163. (5–73)** Используйте тот факт, что отрезок между основаниями двух высот отсекает от треугольника подобный ему треугольник.

**164. (5–73)** Четыре. Проследите за разностями соседних (по диагонали) чисел.

**165. (6–73)** Сумма длин – любая, большая  $\frac{180^\circ}{n}$ .

**166. (6–73)** б)  $\frac{c}{1+c}$ , где  $c = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} + \dots + \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}$ .

**169. (6–73)** Наименьшее и наибольшее значения равны соответственно: а)  $\frac{kn(n+1)}{2}$ ; б)  $\frac{n(n-1)^2}{2} + \frac{kn(n+1)}{2}$ .

**170. (7–73)** Точки  $O, N, P, C$  лежат на одной окружности.

**171. (7–73)** Если продолжить две взятые через одну стороны (или сторону и диагональ, не имеющую с ней общих точек) до пересечения в точке  $P$ , то расстояние от  $P$  до одной из вершин шестиугольника равно  $\sqrt{7}$ .

**172. (7–73)** Можно использовать малую теорему Ферма: если  $p$  – простое, то  $a^p - a$  делится на  $p$  при любом целом  $a$ .

**173. (7–73)** Сначала удобно доказать это для чисел, стоящих в четырех средних клетках.

**174. (8–73)** См. статью И. Шарыгина «Об одном геометрическом месте точек». Множество точек  $M$ , для которых  $AM^2 - BM^2 = \text{const}$ , – прямая.

**175. (8–73)** а)  $\left[\frac{2m}{3}\right] + 1$ ; б)  $\left[\frac{m}{2}\right] + 1$ ; в)  $\left[\frac{2m}{k}\right] + 1$ . Подсчитайте сумму значений всех  $x_i$ .

**177. (8–73)** Если  $n$  нечетно, то  $x = a^{\frac{n}{2}}\sqrt{2}$  или  $x = a$  ( $a \neq 0$ ); если  $n$  четно, то  $x = \pm a^{\frac{n}{2}}\sqrt{2}$  или  $x = \pm a$ .

**178. (8–73)** Проведите через  $R$  прямую, параллельную  $BC$ ; ее точки пересечения с  $AB$  и  $AC$  равноудалены от  $P$ .

**179. (9, 12–73)** в)  $\left(\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}\right)$  или  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ .

г) Удобно тройку  $(\alpha, \beta, \gamma)$  углов рассматривать как точку в треугольнике (расположенную на расстояниях  $\alpha, \beta, \gamma$  от сторон). Неподобных треугольников  $2^{2n} - 2^n$ .

**180. (9–73)** Функция  $f_T(n)$  имеет порядок не меньше  $\log_2 n$ ; существует стратегия с порядком роста менее  $2 \log_2 n$  и даже  $\log_2 n + C \log_2 \log_2 n$ .

**181. (9–73)** Наименьшая длина равна 150 см.

**182. (9–73)** Удобно принять за новые переменные знаменатели и использовать неравенство  $\frac{x}{x} + \frac{y}{x} \geq 2$ .

**183. (9–73)** Высота равна  $\frac{ab^y}{b-a}$ .

**184. (10–73)** Индукцией или проверкой, что многочлены (после приведения к общему знаменателю) слева и справа совпадают при  $x = -k$  ( $k = 0, \dots, n$ ).

**185. (10–73)** Выразите суммарную площадь заплат и их пересечений через величины площадей, покрытых ровно  $k$  слоями.

**186. (10–73)** Это (3, 3, 3), (2, 3, 6), (2, 4, 4) и их перестановки.

**187. (10–73)** б), в) Множество точек, отношение расстояний которых до двух данных равно постоянной величине, — окружность.

**188. (10–73)** Если связность нарушилась, то найдутся  $k \leq n$  городов, из которых нельзя проехать (с пересадками) в остальные  $2n - k$  городов.

**189. (10–73)** Можно использовать тот факт, что биссектриса (и даже медиана) треугольника не больше полусуммы сторон, между которыми она проведена, или провести через  $E$  и  $F$  прямые, перпендикулярные  $EF$ .

**190. (11–73)** См. статью Н.Васильева «Последовательность прыжков». Отложив векторы прыжков от одной точки, проследите за изменением их направлений; за два шага оно поворачивается на угол  $2\alpha$ .

**191. (11–73)** Это прямая (представьте, что точка  $O$  равномерно движется по серединному перпендикуляру к  $AB$ ).

**192. (11–73)** Можно доказать, что некоторое частное будет степенью числа 2.

**193. (11–73)** Даже сумма площадей некоторых четырех из обсуждаемых треугольников больше площади пятиугольника. (см. статью А.Лопшица «Задача Мёбиуса и ее продолжение»; 3–77).

**194. (11–73)** а)  $ab - a - b$ ; б) представление с условием  $0 \leq y < a$  однозначно

**195. (1–74)** См. статью М.Гервера «Сюрпризы». Точка  $D$  единственна Постройте попарно касающиеся окружности с центрами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и еще одну, касающуюся всех трех.

**196. (12–73)** Подсчитайте сумму дуг, стягиваемых хордами, и им симметричных.

**197. (12–73)** Можно действовать по индукции: если условие не выполнено, переставим пару чисел так, что сумма увеличится.

**198. (12–73)** Треугольника  $KAB$ ,  $BCH$ ,  $KDH$  подобны.

**199. (12–73)** Можно по индукции доказать для этих сумм  $S_n$  соотношение  $S_{n+1} = S_n - pqS_{n-1}$ .

**200. (1, 3–74)** б) 108; в) 120.

**203. (1–74)** Центр окружности – точка пересечения диагоналей.

**204. (1–74)** См. статью Г.Гуревича и Ж.Раббота «О вероятности и хороших числах».

**205. (2–74)** Найдутся два разных подмножества задач, с одинаковой четностью числа решенных каждым студентом (принцип Дирихле).

**207. (2–74)** Вершины  $M_i$  вращаются по окружностям.

**208. (3–74)** а)  $1 - \frac{1}{n}$ ; б)  $\frac{1}{2(n-1)}$ .

**209. (3–74)** Тангенсы  $x$ ,  $y$ ,  $z$  связаны условием  $xy + yz + zx = 1$ , поэтому  $S = (x + y + z)^2 - 2$ .

**210. (3–74)** Таких последовательностей  $1001^3$ . Проследите за числом единиц на местах с номерами  $3k$ ,  $3k + 1$ ,  $3k + 2$  ( $k$  – целое).

**211. (4–74)** Примеры (для четного и нечетного  $n$ ) можно строить по индукции.

**212. (4–74)** Для  $n$  монет достаточно  $\lceil \log_2 n \rceil + 1$  взвешиваний. Но точная оценка снизу неизвестна.

**214. (4–74)** Либо  $f(x) > x$ , либо  $f(x) < x$  при всех  $x$ .

**215. (4–74)** а) Рассмотрите большой черный квадрат. б) Это можно доказать индукцией, рассмотрев крайние полосы, содержащие черные клетки.

**216. (4–74)** Пример можно построить по индукции (как и в задаче 211).

**217. (4–74)** Рассмотрите симметричный (относительно данной точки) многоугольник; разность площадей, как функция угла поворота прямой, имеет экстремумы лишь в точках пересечения многоугольников.

**218. (4,11–74)** Аналогичное неравенство верно и для любого  $n \geq 4$  (с той же константой 4); это можно доказать индукцией по  $n$ . (Сравните с задачей 257.)

**219. (5–74)** Существует 29 параллелепипедов.

**220. (5–74)** Это  $64$  и  $28 + 36\sqrt{2}$ . Между соседними появлениями на границе должен быть переход через сторону клетки.

**222. (6–74)** Рассмотрите грань с наибольшим числом сторон.

**224. (6–74)** Используйте векторы или проекции на плоскость, проходящую через две биссектрисы.

**225. (6–74)** Это 351 и 342. Между двумя  $x$  обязательно встретится  $7 - x$ .

**226. (6–74)** Ни один кузнечик не может попасть в четвертую вершину квадрата.

**228. (6–74)** а) Всегда; б), в) не всегда.

**229. (6–74)** При точном описании стратегии того и другого удобно особо выделить случаи, когда полицейский находится втрое ближе к некоторой оси симметрии, чем гангстер (и по ту же сторону от нее).

**230. (6–74)** Предположив противное, найдите возможные положения вершин пятиугольника по отношению к (фиксированной на плоскости) наибольшей диагонали.

**231. (7–74)** Бесконечно много:  $(2, k, k + 1)$ .

**232. (7–74)** б) Нет. Пример: полуокружность без конца.

**233. (7–74)** Для данного числа это 1972 (поскольку 1973 простое); для любого  $n$  это число равно количеству чисел, взаимно простых с  $n$  (от 1 до  $n - 1$ ).

**234. (7–74)** Площадь равна  $5/7$ .

**235. (7–74)** Удобно распрямить путь льва и посмотреть, как движется центр арены.

**236. (8–74)** б) Это верно для  $m = n(k - 1) + 1$ .

**237. (8–74)** Массы должны относиться как:

а)  $\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \gamma$ ; б)  $\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma$ ;

г)  $\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$ .

**238. (8–74)**  $n$ -я сумма выражается через  $(n - 1)$ -ю и  $(n - 2)$ -ю в виде линейной комбинации с целыми коэффициентами (важно лишь, что 1973 – число вида  $4k + 1$ ).

**239. (8–74)** Для угла  $\alpha_n = \angle C_n BA$  получается отображение

$\alpha_{n+1} = \left| 2\alpha_n - \frac{\pi}{2} \right|$  (отрезок  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$  растягивается вдвое и складывается пополам).

**240. (8–74)** б) Оптимальный способ вычисления для чисел  $n$ , в двоичном разложении которых единиц по крайней мере на две больше, чем нулей, должен включать деление.

**241. (9–74)** Можно записать данную сумму как  $(3^{2 \cdot 987} + 2^{2 \cdot 987}) + (5^{3 \cdot 658} + 2^{3 \cdot 658})$ .



**242. (9–74)** Эти числа пропорциональны разностям квадратов сторон.

**243. (9–74)** Поместите в  $B_i$  массу  $\frac{A_i G}{B_i G}$ .

**245. (9–74)** а) Да; б) нет; в) 6.

**246. (10–74)** Проведите через  $O$  прямые, параллельные  $m$  и  $n$ , и отразите относительно них  $n$  и  $m$ .

**247. (10–74)** При всех, кроме  $k = 1$  и  $k = 3$  (исследуйте более общую задачу: укладку полосы шириной 6).

**248. (10–74)** Если  $n$ -угольники  $B_1 \dots B_n$  и  $C_1 \dots C_n$  подобны, то площадь  $A_1 \dots A_n$  равна  $\sqrt{PQ}$ . В общем случае можно утверждать лишь, что она не менее  $\sqrt{PQ}$ . (См. также статью Н.Васильева «Семейство параллельных  $n$ -угольников»; 11–74.)

**249. (10–74)** Угол равен  $60^\circ$ ; сумма  $KD' + D'M$  равна ребру куба.

**250. (10–74)** а) Рыцарей можно рассаживать в ряд, постепенно удлиняя цепочку, так, чтобы у крайних (среди сидящих) было не меньше половины друзей.

б) См. статью Н.Вагутена «Задачи о графах, или Сказка «Иван-Царевич и Серый Волк»; 11–74.

**251. (11–74)** Начнем расставлять через одну фишку того цвета, которых больше всего. (Сравните с задачей 250.)

**252. (12–74)** См. статью А.Егорова «Решетки и правильные многоугольники».

**253. (11–74)** Постройте описанную окружность.

**254. (11–74)** в) Это  $0,33\dots 3166\dots 6$  (100 троек, 99 шестерок).

**255. (11–74)** Середины касательных (а также все точки, из которых касательные к шарам равны) лежат в одной плоскости, перпендикулярной линии центров.

**256. (12–74)** Если  $p, q$  – расстояния от точки  $M$  окружности до касательных в точках  $P$  и  $Q$ , то расстояние от  $M$  до прямой  $PQ$  равно  $\sqrt{pq}$ .

**257. (12–74)** а) При всех  $n$ ; б) при  $n \leq 3$ ; в) при  $n \leq 4$ . Представьте разность левой и правой частей как сумму квадратов линейных функций от  $x_{k-1}, x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

**258. (12–74)** б) Если фиксировать порядок вершин четырехугольника, то это множество – «крест» из четырех параллелограммов (если нет – нужно взять объединение таких крестов).

**259. (12–74)** а) Пять; б) в зависимости от четности (и остатка от деления на 4 для нечетного  $n$ ):  $\frac{mn}{4}, \frac{m(n-1)}{4}$  или  $\frac{m(n-1)-2}{4}$ .

**260. (12–74)** Трудная индукция по числу ( $n$ ) точек разбиения.

**261. (1–75)** Можно описать движение точки как движение конца суммы двух векторов, каждый из которых вращается со своей угловой скоростью

**264. (1–75)** Докажите сначала, что от любой зеленой площади можно доехать до синей.

**265. (1–75)** Можно использовать тот факт, что в трехгранном угле сумма плоских углов меньше  $2\pi$ .

**267. (1–75)** Можно (по индукции) доказать, что два из показателей степеней 2, 3, 5 каждого из чисел в тройке совпадают, а третьи отличаются на 1

**268. (2–75)** Выигрывает первый: он может возвращаться на диагональ, приближаясь к цели.

**269. (2–75)**  $T_k(n) = T_k(n-1) + nT_{k-1}(n-1)$ .

**271. (2–75)** Можно. Индукция (переход от  $n$  к  $2n-1$  и  $2n$ ).

**272. (2–75)** Если  $r < R < 3r$ , то минимум стороны равен  $4\sqrt{Rr}$ ; если  $R \geq 3r$ , то  $AB$  принимает любое значение, строго большее  $\frac{(R+r)^2}{2(R-r)}\sqrt{\frac{R}{r}}$ .

**273. (3–75)** а) Докажите сначала, что  $f$  монотонна; б) нет.

**274. (3–75)** а) 4; б) 11; в) 16. Проследите за остатками при делении на небольшие числа (в пределах 10).

**275. (3–75)** Изучите сначала одномерный вариант задачи. Используйте индукцию.

**276. (3–75)** Рассмотрите преобразование подобия с центром  $H$ , переводящее отрезок  $BC$  в  $PB$ .

**277. (3–75)** Проследите, как меняется число отрезков, соединяющих точки разного цвета.

**278. (3–75)** а) Нет; б) да.

**279. (3–75)** Пусть  $n = 3k + r$  ( $r = 0, 1, 2$ ). Тогда. а)  $n = k + r$  (при  $n > 4$ ); б)  $k$ , если  $r = 0$ ;  $n$ , если  $r \neq 0$ .

**280. (4–75)** Минимальная площадь равна  $1/8$ .

**282. (4–75)** Сначала можно превратить в нули все числа первого столбца.

**283. (4–75)** Рассмотрите центр подобия (докажите, что многоугольники гомотетичны).

**284. (4–75)** Рассмотрите сто чисел  $a_1, a_2, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{100}$  (где  $a_1 \neq a_2$ ) и их остатки при делении на 100 (принцип Дирихле).

**285. (4–75)** Рассмотрите блоки, у которых горизонтальная сторона равна 1, пересекающие вертикальные прямые, находящиеся на расстоянии  $x$  от самой левой стороны.

**286. (5–75)** Отмеченных точек будет  $2N - 3$ .

**287. (5–75)** Существует. Ее можно «наращивать» по индукции.

**288. (5–75)** Рассмотрите ученого с наибольшим числом друзей.

**289. (5–75)** Рассмотрите массы гирь в системе счисления с основанием  $K$ .

**290. (5–75)** Для четных:  $n \geq 10$ , для нечетных:  $n \geq 15$ .

**292. (6–75)** Любое нечетное число от 1 до 49.

**293. (6–75)** Предел равен  $(\pi - \alpha)/3$ .

**294. (6–75)** После раскрытия скобок получаем выражение  $abcd(xy - uv)^2$ .

**295. (6–75)** в) Площадь  $S_t$  – квадратный трехчлен от  $t$  с положительным дискриминантом.

**296. (7–75)** Рассмотрите все циклические перестановки столбцов.

**297. (7–75)** См. статью В.Фишмана «Решение задач с помощью геометрических преобразований». (Сравните эту задачу с задачей 291.) Рассмотрите повороты на  $90^\circ$  с центрами в серединах отрезков  $A_1A_3$  и  $A_2A_4$ .

**298. (8–75)** См. статью Н.Вагутсна «Близкие дроби». Рассмотрите параллелограмм, построенный на векторах  $(p, q)$  и  $(r, s)$ .

**299. (7–75)** Только при  $n = 3, 4, 6$ . (Сравните с задачей 252.)

**300. (10–75)** См. статью А.Степина и А.Таги-Заде «Слова с ограничениями». Если  $G_l$  – число хороших слов длиной  $l$ , то  $3G_l \geq 3G_{l-1} - \sum_{k=1}^l G_{l-k}$ , откуда  $G_l \geq 2^l$ .

**301. (8–75)** Рассмотрите систему отрезков с разноцветными концами с минимальной суммой длин или докажите, что можно разбить плоскость на две полуплоскости, в которых поровну (и не 0) синих и красных точек.

**302. (8–75)** Точки  $C, D, B', A'$  лежат на окружности. (Можно также рассмотреть композицию симметрии и гомотетии с центром  $O$ .)

**303. (8–75)** Посчитайте, в какое количество точек мог попасть центр тяжести гирек  $(x_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq 10$  – точки с координатами  $\frac{\sum x_i}{10}, \frac{\sum y_i}{10}$  (принцип Дирихле).

**304. (9–75)** Можно использовать индукцию. Эта операция – почленное «сложение по модулю 2» цифр двоичной записи данных чисел.

**305. (9–75)** а) Подсчитайте двумя способами отношение площадей треугольников  $B'PC'$  и  $BPC$  используйте теорему косинусов. б) Можно использовать пункт а) или инверсию.

**306. (9–75)** На 18. Рассмотрите треугольники с основаниями на стороне вырезанной клетки.

**308. (10–75)** в) Рассмотрите  $n$  единичных векторов, составляющих с осью  $Ox$  углы  $\varphi, 2\varphi, \dots, n\varphi$ , где  $\varphi = 2kn/(n+1)$  и  $k$  не делится на  $n+1$ ; докажите, что  $\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi = -1$ .

**309. (10–75)** а)  $n$  не кратно 3; б)  $n = 3k$  или  $n = 3k + 1$ .

**310. (9–75)** См. статью Г.Гуревича «Бесповторные последовательности».

**311. (10–75)** Выбирайте из бактерий-сестер ту, у которой число потомков (среди 1000) больше.

**312. (10–75)** Докажите сначала, что у всех параллелограммов общий центр симметрии, и изучите, как меняется одна сторона параллелограмма  $P_3$  как функция от другой.

**315. (10–75)** Рассмотрите наименьший (по числу обходных граней) замкнутый путь.

**316. (11–75)** Найдите сумму квадратов чисел от  $n - 1$  до  $n + 1$ . Рассмотрите остаток от деления ее на 3, 4, 5, 11.

**317. (11–75)** Количество стран на расстоянии  $k$  от данной не больше  $7 \cdot 6^{k-1}$ .

**318. (12–75)** Условие эквивалентно тому, что углы  $AEC$  и  $ADC$  равны или в сумме дают  $\pi$ .

**319. (12–75)** а) Точка  $P$  должна располагаться не далее чем на расстоянии  $1/3$  радиуса от центра круга. б) Используйте тот факт, что треугольник  $ABC$  – остроугольный, а проекция точки  $D$  попадает в точку пересечения его высот.

**320. (12–75)** Только треугольники. Подсчитайте сумму всех углов треугольников разбиения. Оцените число вершин, лежащих внутри  $n$ -угольника, с помощью подходящего отображения множества сторон во множество вершин.

**321. (1–76)** Придумайте сначала систему  $N$  салфеток равной площади  $S$ , в которой пересечение каждой двух имеет площадь  $S/2$ .

**322. (1–76)** б) Можно действовать по индукции, вычеркнув букву, расположенную между двумя ближайшими одинаковыми буквами, и одну из этих букв.

**323. (1–76)** Функцию можно задавать последовательно на интервалах  $[-1; 1]$ ,  $(1; 3]$ ,  $[-3; -1)$ ,  $(3; 5]$ ,...

**324. (1–76)** Нужно следить за числом камней в максимальной кучке (выигрывающие ходы:  $2^k - 1$ ).

**325. (1–76)** Числа, стоящие под центральным, растут по крайней мере вдвое.

**326. (2–76)** Это  $8h/5$ .

**327. (2–76)** Наименьшее  $k$  равно  $\left\lceil \frac{N+1}{2} \right\rceil$ .

**328. (2–76)** Во всех случаях паук может поймать муху, если ее скорость не больше удвоенной скорости паука.

**329. (2–76)** Можно воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим. Более точная оценка:  $16\pi/n^3$ .

**330. (4–76)** См. статью Н.Васильева «Сложение фигур».

**331. (3–76)** Рассмотрите композицию поворота на угол  $\alpha/2$  и гомотетии с коэффициентом  $1/\cos(\alpha/2)$  (где  $\alpha$  – угол поворота, упомянутого в условии).

**332. (3–76)** Можно при четном  $k$  и нельзя при нечетном (рассмотрите замкнутые цепочки одноцветных кубиков).

**333. (3–76)** Рассмотрите моменты, когда одна из мух находится в вершине.

**334. (3–76)** а) Рассмотрите  $P(10^N)$ ; б) рассмотрите  $P(x + M)$ , где  $M$  – большое натуральное число.

**335. (3–76)** а) 13; б) 52. Оцените число пар вертикалей, которые пересекают некоторую горизонталь по отмеченным клеткам.

**336. (4–76)** Рассмотрите семейство параллельных прямых.

**337. (4–76)** а)  $\sqrt{3}/12$ ; б)  $3\sqrt{2(17 - \sqrt{33})}/8$ .

**338. (2–76)** См. статью Ю.Ионина и Л.Курляндчика «Поиск инварианта». Проследите за четностью количества цифр 0, 1, 2.

**339. (4–76)** Рассмотрите: а) суммарное число отрезков всех путей; б) два крайних пути; в) средний по номеру путь.

**340. (5–76)** б) Рассмотрите функции  $f(t) = \max_{1 \leq i \leq m} (a_i - p_i t)$  и  $g(t) = \max_{1 \leq j \leq n} (q_j t - b_j)$ .

**341. (5–76)** а)  $k = n - 2$  при  $n \geq 3$ ; б)  $k = n - 5$  при  $n$  четном ( $n \geq 8$ ) и  $k = n - 4$  при  $n$  нечетном ( $n \geq 7$ ).

**342. (5–76)** а) Построить пример можно индукцией по  $n$ . б) Рассмотрите те числа с одинаковой первой цифрой, которых больше половины, и посчитайте число совпадений в других разрядах.

**343. (6–76)** Рассмотрите города, в которые можно приехать из  $A$  или из  $B$  по кратчайшему пути, минуя закрытую дорогу  $AB$ .

**344. (6–76)** Нет. Рассмотрите граничные клетки.

**345. (6–76)** а) Нет; б), в) да – рассмотрите движение «назад».

**347. (6–76)** За 13.

**348. (6–76)** Представьте каждое число как  $10x + y$  и рассмотрите отдельно суммы иксов и игреков.

**349. (6–76)** а)  $b^2 = ac$  (здесь  $a \leq b \leq c$  – стороны);

б)  $2b^2 = a^2 + c^2$ ; в)  $a = b = c$ .

**350. (6–76)** а) Когда  $m - 1$  и  $n - 1$  взаимно просты.

**351. (7–76)** Используйте описанную окружность.

**352. (7–76)** Рассмотрите «сопряженное» число  $45 - \sqrt{1975}$ .

**353. (7–76)** Рассмотрите векторы, перпендикулярные граням тетраэдра, длины которых соответственно равны площадям граней.

**354. (8–76)** Можно.

**355. (8–76)** Длительность игры равна наименьшему общему кратному длин циклов, описываемых каждым мячом.

**356. (8–76)** Докажите (рассмотрев круги с диаметрами  $MB_i$  и  $MC_i$ ), что  $\angle A_{i+1} = \angle BM_iC - \angle A_i$ .

**359. (5, 6–76)** См. статью А.Землякова «Математика бильярда» (решение задач 12–13).

**360. (8–76)** а) 20; б) 24. Рассмотрите сумму чисел  $a_i^2$ .

**361. (9–76)** Если  $m$  и  $n$  – одинаковой четности ( $m, n > 1$ ), то выигрывает второй, а если разной – первый.

**362. (9–76)** Докажите, что каждый отрезок разбит на равные части, а площади в каждом ряду составляют арифметическую прогрессию (даже в общем случае, когда стороны разбиты не на 3, а на большее число равных частей).

**363. (9–76)** Выразите угловые коэффициенты через абсциссы точек  $A_i$ ,  $B_i$  и коэффициенты уравнений, задающих параболы.

**365. (10–76)** а), б), в) Да.

**366. (10–76)** Да (причем эти треугольники не пересекаются!). Существует пример с 6 треугольниками.

**367. (10–76)** а), б) Нет.

**370. (10–76)** а) Да; б) нет (можно указать тройку вида  $\lambda$ ,  $\lambda^2$ ,  $\lambda^3$ ).

**371. (11–76)** За 6 вопросов. (Для  $N$  полей, где  $2^{k-1} < N \leq 2^k$ , – за  $k$  вопросов.)

**372. (11–76)** Сумма расстояний до вершины треугольника с углами меньше  $120^\circ$  минимальна для точки, из которой стороны видны под углом  $120^\circ$  (точка Торричелли).

**375. (11–76)** Можно действовать по индукции, деля объем пополам.

**377. (12–76)** Рассмотрите точку  $K$  на  $AC$ , для которой  $AK = BC - AB$  (при  $BC > 2AB$ ).

**378. (12–76)** а) Рассмотрите остатки при делении на 9. б) Принцип Дирихле: подсчитайте количество таких чисел, меньших  $M^n$ . в) Сумма  $(a^3 - 3^6)^3 + (-a^3 + 3^5 a + 3^6)^3 + (a^2 + 3^4 a)^3$ , деленная на  $a$ , — точный куб.

**379. (1–77)** Радиусы промокашек, подходящих для данного куска, заполняют отрезок.

**380. (2–77)** См. статью С.Пухова «Задача о выпуклых телах».

**381. (1–77)** Рассмотрите вместе с каждым подмножеством его дополнение.

**382. (1–77)** Если полином  $P(x)$  имеет корень  $m$ , то он делится на  $x - m$  (теорема Безу).

**383. (1–77)** Рассмотрите остатки от деления на 4.

**384. (1–77)** Опишите вокруг квадратов окружности

**385. (4–77)** См. статью А.Кушниренко «Целые точки в многоугольниках и многогранниках».

$$\text{е) } V = \frac{N(3F) - 3N(2F) + 3N(F) - 1}{6}$$

**386. (2–77)** Число комнат с нечетными сторонами четно

**387. (2–77)** Да. Достаточно найти  $n$  такое, что  $10^n + 1$  делится на квадрат. Так будет, например, при  $n = 11$

**388. (2–77)** а) Рассмотрите выпуклую оболочку множества данных точек; б) да.

**389. (2–77)** Да.

**390. (2–77)** Рассмотрите остатки чисел вида  $2^n$  при делении на 9 и количества цифр этих чисел.

**391. (3–77)** а) Можно доказать по индукции, что если  $x_0$  и  $x_1$  меньше  $2n$ , то среди первых  $2n$  чисел  $x_i$  есть 0. б) Переставим числа в порядке убывания и докажем, что тогда каждое (кроме начального) число будет не меньше суммы двух следующих.

**392. (3–77)** Квадрат площади треугольника с вершинами в точках нахождения пешеходов, как функция времени, — квадратный трехчлен.

$$\text{393. (3–77) Это } \frac{n+1}{2}.$$

**394. (3–77)** См. также статью Ю.Ионина и А.Плоткина «Среднее значение функции»; 7–77.

**395. (4–77)** В общем случае число неэквивалентных расстановок равно  $2^{\varphi(n)}$ , где  $\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ ,  $n = p_1^\alpha \dots p_n^\alpha$ ,  $p_i$  – простые числа. Это можно доказывать индукцией (по числу простых множителей  $n$ ).

**396. (5–77)** Треугольники разбиения должны быть «очень тупоугольными» и прижиматься к стороне правильного треугольника.

**398. (6–77)** См. статью Н.Васильева и А.Толпыго «Плавные последовательности».

**399. (12–76)** См. статью А.Савина «От школьной задачи – к проблеме».

**400. (5–77)** Более сильную оценку снизу  $(N(N+1)/2 + N - 2)$  можно доказать по индукции. Можно построить серию примеров универсальных последовательностей длиной  $N^2 - 2N + 4$ . При  $N = 4$  пример выглядит так: 41234 1243 142, при  $N = 5$  – так: 5 12345 12354 12534 152.

**402. (5–77)** Рассмотрите числа  $a$  с номерами  $2^n$ : они равны  $na_2$ .

**403. (6–77)** Грани можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние грани были разных цветов.

**404. (12–76)** См. статью А.Савина «От школьной задачи – к проблеме». При  $n > 4$  – можно.

**405. (6–77)** а) Рассмотрите клетку отрезка, на который перелетел центральный жук. б) Нет. в) Да. Рассмотрите наименьший прямоугольник, переходящий в себя; используйте индукцию.

**406. (6–77)** В качестве параметра удобно выбрать координату  $\varphi$  точки  $M$  на окружности.

**407. (6–77)** Пусть  $d = \text{НОД}(m, n)$ ; рассмотрите разложение  $m = ab$ , где множитель  $b$  – наибольший взаимно простой с  $d$ .

**408. (6–77)** Это  $\sqrt{30}$ ,  $\sqrt{15/2}$ ,  $\sqrt{10/3}$ ,  $\sqrt{6/5}$ .

**409. (6–77)** б) Докажите по индукции, что если в  $k$ -й строке число  $a$  отлично от написанного над ним, то  $a \geq 2^{k-2}$ .

**410. (6–77)** См. статью А.Лодкина «Функциональное уравнение на сфере».

**411. (7–77)** Отрезок имеет длину  $\frac{2abc}{a+b+c}$ .

**412. (7–77)** Можно провести индукцию по числу площадей, используя замкнутые циклы.



**413. (4–77)** См. статью И.Яглома «О хордах непрерывных кривых». Вместе с графиком функции рассмотрите график, сдвинутый на  $a$ .

**414. (7–77)** а) 4S. б) Удобнее всего использовать операцию  $[u, v]$ , сопоставляющую векторам  $u = (a, b)$ ,  $v = (c, d)$ , проведенным из начала координат, величину  $(ad - bc)$  – ориентированную площадь параллелограмма (см. указание к задаче 193).

**415. (7–77)**  $\left[ \frac{n^2 - n}{4} \right]$ , где  $[x]$  – целая часть  $x$ .

**416. (8–77)**  $\left[ \frac{n^2}{4} \right]$ , где  $[x]$  – целая часть  $x$ . Рассмотрите точку, из которой выходит максимальное число отрезков.

**417. (8–77)** Рассмотрите проекции на прямые, параллельные трем взаимно перпендикулярным ребрам.

**418. (8–77)** Можно использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

**419. (8–77)** Рассмотрите площади колец (с радиусами 2 и 3) с центрами в данных точках и докажите, что по крайней мере 10 из них пересекаются.

**420. (3–79)** См. статью Н.Вагутена «Арифметические препятствия».

**421. (9–77)** Раскраска существует, если и только если  $n$  делится на  $m$ .

**422. (9–77)** Проведите окружность с центром в точке пересечения биссектрис, проходящую через ближайшую к ней вершину.

**423. (9–77)** Рассмотрите неравенство, которое получится, если в каждой части данного неравенства оставить две (первые) скобки.

**424. (9–77)** Эта точка – центр описанной сферы.

**425. (9–77)** Нет. Докажите, что множество чисел, представимых в виде суммы  $n$  дробей вида  $1/q$ , не содержит ни одной бесконечной возрастающей последовательности.

**426. (10–77)** Только при нечетном  $n$ .

**427. (10–77)** Можно взять: а)  $n = 3$ ; б)  $k = 2n - 1$ .

**428. (10–77)** Можно доказать это индукцией по  $m$ . Для  $(m - 1)n$  участников утверждение неверно.

**429. (10–77)** Можно использовать график  $y = [x]$  (поскольку  $[x] + \{x\} = x$ ).

**430. (10–77)** Рассмотрите полосу, содержащую фигуру, края которой проходят через две самые далекие точки.

**431. (11–77)** Достаточно идти напрямик и обходить деревья.

**432. (11–77)** Это числа, дающие остатки 0, 1, 4 или 7 при делении на 9.

**434. (12–77)** в) Рассмотрите многочлен  $L_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$  и докажите, что производная многочлена  $L_n(2x - x^2) - 2L_n(x)$  имеет целые коэффициенты. См. также статью Л.Курляндчика и А.Лисицкого «Суммы и произведения»; 10–78.

**435. (12–77)** Можно действовать по индукции, выбрав наибольшее (подчеркнутое дважды) число.

**436. (1–78)** Найдите сумму чисел в каждом подмножестве.

**437. (1–78)** Они соответствуют разбиению  $n$  сомножителей на два подмножества.

**438. (1–78)** Искомая точка диаметрально противоположна середине дуги сегмента. Можно использовать инверсию или теорему о произведении отрезков секущих.

**439. (1–78)** Между корнями функции лежит корень производной.

**440. (1–78)** При: а) 297; б) 2500. Удобно рассмотреть плоскости, перпендикулярные шампурам и проходящие через центры кубиков. Можно использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

**441. (2–78)** Проведите большую диагональ.

**442. (2–78)** Докажите, что  $a_i + a_{p-i} = p^2$ .

**443. (2–78)** в) Те, у которых равны суммы по всем строкам и столбцам.

**444. (3–78)** а) Да. б) На 14 областей (6 четырехугольников и 8 треугольников). в) На 22 области (2 пятиугольника и по 10 четырехугольников и треугольников).

**445. (3–78)** Это число пропорционально площади (с коэффициентом  $1/\sqrt{3}$ ).

**446. (4–78)** 142 точки. Красит только первая точка!

**447. (4–78)** Углы равны  $50^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $60^\circ$ .

**448. (4–78)** Достаточно доказать это для окружности, вписанной в четырехугольник (и воспользоваться аффинным преобразованием). Удобно использовать для этого площади.

**449. (4–78)** См. статью А.Землякова «Арифметика и геометрия столкновений».

**450. (5–78)** Сумма площадей попарно различных прямоугольников не больше

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots\right).$$

**451. (5–78)** Подсчитайте разными способами сумму всех отсеченных чисел.

**452. (5–78)** Расстояния от искомой точки пересечения до вершин  $T_2$  равны расстояниям от этих вершин до соседних с ними вершин  $T_1$ .

**453. (5–78)** Каждая из сумм попадает в один из отрезков  $[b_k; 2b_k]$ , где  $b_k = (a_1 + \dots + a_k)/2$ ,  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ .

**454. (5–78)** Было  $0, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \dots, \frac{6}{7}$ . Рассмотрите гнома, который разливает наибольшее количество молока.

**455. (4–79)** См. статью И.Янтарова «Коммутирующие многочлены» (см. также статью В.Бугаенко в альманахе «Математическое просвещение»; вып.1, 1997).

**456. (6–78)** Достаточно доказать, что для двух соседних вершин все их соседи лежат на одной сфере.

**457. (6–78)** Рассмотрите углы, вертикальные к углам ломаной.

**458. (6–78)** Да. Нужно оставить для последних двух ходов (второго и первого) хотя бы одну звездочку при нечетной степени  $x$  и добиться, чтобы в некоторых двух точках многочлен имел разные знаки.

**459. (6–78)** Можно построить соответствие между множествами билетов первого и второго маршрутов, при котором цена соответствующих билетов второго не меньше, чем первого.

**460. (6–78)** а)  $7^2$ ,  $41^2$ ; б)  $499900001^2$ ; г) для любого  $k$  существует  $(4k + 2)$ -значное особое число.

**461. (7–78)** Занумеруем гири по порядку и будем ставить их так, чтобы в каждый момент номера использованных гирь шли подряд, причем соседние номера попадали на разные чашки.

**463. (7–78)** Можно доказывать это утверждение по индукции, заменив пару наибольших чисел среди  $x_i$  и  $y_i$  их разностью.

**464. (7–78)** Выберем последовательность квадратов, каждый из которых – наибольший среди тех, чьи центры не лежат в выбранных ранее; среди них нет пяти, имеющих общую точку.

**465. (8–78)** См. статью С.Фомина «Билеты и ящики». Для  $k = 2, 3, 4, 5, \dots$  искомые значения равны 50, 34, 26, 18,...

**468. (8–78)** Можно действовать методом координат.

**469. (8–78)** Рассмотрите  $(n - 2)$ -ю производную многочлена  $x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ , где  $P$  – исходный. Используйте тот факт, что между корнями многочлена лежит корень производной.

**470. (10–78)** См. статью Л.Курляндчика и А.Лисицкого «Суммы и произведения». Попробуйте сложить исходные суммы почленно с обращенными и применить индукцию.

**471. (9–78)** Если каждая из линий делит площадь (связной) фигуры пополам, то эти линии пересекаются.

**472. (9–78)** Оцените объемы кусков дополнения, прилежащих к двум соседним вершинам.

**473. (9–78)** Для «слияния» группы упорядоченных  $m$  и  $n$  гирь достаточно  $m + n - 1$  взвешиваний.

**474. (9–78)** Делители  $N$  разбиваются на пары  $d, N/d$ .

**476. (10–78)** Рассмотрите точки решетки с координатами той или иной четности.

**477. (10–78)** Остатки при делении на  $d$  периодически повторяются. Рассмотрите  $d = b_{n+1} - 1$  (если это число больше  $n$  и больше  $b_n$ ).

**478. (10–78)** в) Рассмотрите команду, которая выиграла не меньше встреч, чем другие; команд, выигравших у нее, согласн а), не меньше 7.

**479. (10–78)** б) Существуют. Их можно строить по индукции; прибавив к 0 и числам набора из  $n$  чисел их произведение, получим набор из  $n + 1$  чисел.

**480. (10–78)** в) Рассмотрите отрезки  $\left[ (c_n - 1) \left( \frac{3}{2} \right)^{-n}; c_n \left( \frac{3}{2} \right)^{-n} \right]$  – они образуют стягивающуюся последовательность.

**481. (10–78)** Найдите конечное множество  $A$ , в которое заведомо попадает последовательность (при любом  $a_1$ ), и изучите орбиты данного преобразования на  $A$ .

**482. (11–78)** Полезно рассмотреть семейство сечений, параллельных данному, а также развертку тетраэдра.

**483. (10–78)** б)  $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{5}$ .

**484. (10–78)** При  $3 \leq n \leq 12$ . (Рассмотрите сумму углов.)

**485. (11–78)** в) Во втором. г) В четвертой. д) В  $2^{k-1}$ -й.

**486. (11–78)** См. статью Л.Курляндчика «Высокие степени». При четных  $n \geq 4$  больше первое число, при нечетных  $n \geq 3$  – второе.

**487. (11–78)** Рассмотрите на касательной к  $\gamma_1$  в точке  $A$  такую точку  $D$ , что касательная к  $\gamma_2$ , проведенная из  $D$ , равна  $DA$ .

**488. (1–82)** См. статью Н.Васильева и А.Зелевинского «Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения».

**489. (11–78)** Предел равен  $\frac{a+b+c}{3}$ . Удобнее (нагляднее!) решать аналогичную задачу на плоскости.

**490. (11–78)** Докажите лемму: из  $r < p$  остатков по простому модулю  $p$ , отличных от 0, можно составить не менее  $r + 1$  различных (по модулю  $p$ ) сумм, включая «пустую» сумму, равную 0.

**491. (12–78)** б) При нечетном  $n$ .

**492. (12–78)** Удобно использовать «барицентрические» соображения (массы и центры тяжести) или отношения площадей.

**493. (12–78)** Сравните площади четверти круга и близких к нему ступенчатых фигур

**494. (1–79)** Можно, разбив квадрат на полосы шириной  $1/n$ , обходить точки каждой полосы по порядку – «змейкой».

**495. (12–78)** См. статью Г.Гальперина и А.Кушниренко «Спутники и задача уплотнения». а) Да. б) Нет. в) Да.

**496. (1–79)** Непредставимых больше.

**497. (1–79)** Постройте полусферы на данных окружностях и посмотрите на них сверху.

**498. (1–79)** Это  $\left[ n + \frac{1}{2} \right]$ . Полезно рассмотреть выпуклую оболочку.

**499. (1–79)** Можно действовать по индукции, построив число из  $2^{10} - 1$  цифр.

**500. (2–79)** в) Это  $N - 1$  секунд. Задача г) – серьезное исследование; см. статью Г.Курдюмова «Консервативность бесконечного строя»; 7–79.

**501. (2–79)** Нарисуйте «логарифмический круг» (шкалу на окружности, в которой числам отвечают дробные части логарифмов и умножению на 3 – поворот на  $\lg 3 \cdot 360^\circ$ ). Заметьте, что среди  $k$ -значных чисел будет три степени тройки в том и только том случае, если одна из них начинается с 9. В пункте а):  $f(2) = 23$ ,  $f(3) = 44$ .

**503. (2–79)** Можно вычесть из данного набора арифметическую прогрессию (для которой неравенство превращается в равенство) с теми же крайними членами.

**504. (3–79)** Подсчитайте число пар соседних клеток типа «занятая» – «свободная».

**505. (6–79)** См. статью П.Блехера и М.Кельберта «Алгоритмы классификации».

**506. (3–79)** Можно, упорядочив  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , представить разность в виде суммы очевидно неотрицательных выражений.

Можно также исследовать разность, как функцию от одной переменной  $d$ .

**508. (4–79)** Можно использовать формулу Герона для площади треугольника или инверсию с центром  $C$ .

**509. (4–79)** а)  $(1; 1)$  и  $(3; 2)$ ; б)  $(3; 2)$ ; в)  $(x; 1; 1)$ ,  $(1; 1; z)$ ,  $(1; 1; 2)$  и  $(3; 2; 2)$ .

**510. (4–79)** Это неравенство Фейра можно доказать индукцией по  $n$ , рассмотрев точку минимума суммы.

**511. (4–79)** Точки  $A, B, M, C$  лежат на окружности.

**513. (5–79)** Поверните график на  $90^\circ$ .

**514. (5–79)** Можно взять  $x_n = \{n\sqrt{2}\} = n\sqrt{2} - [n\sqrt{2}]$ .

**515. (6–79)** а)  $n = 10$ ; б)  $\frac{3^{2n+1} - 1}{2}$ ; в) 14 граней: 6 прямоугольников и 8 треугольников; д)  $\frac{5 \cdot 3^{3n} - 3^{n+1}}{2}$ . Рассмотрите полосы, содержащие данные точки, и их отражения.

**516. (3–79)** См. статью Н.Вагутена «Арифметические препятствия». а) Да; б) нет; в) если  $b - a = 2^m(2k + 1)$ , то при  $n$ , делящемся на  $2k$ .

**517. (7–79)** Не забудьте рассмотреть случай, когда центр круга лежит вне многоугольника.

**518. (7–79)** Перемножьте неравенства  $\frac{ab}{x_i} + x_i \leq a + b$ . Можно также использовать выпуклость функции  $y = \frac{1}{x}$ .

**519. (7–79)** б) При  $\alpha > \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ .

**520. (2–80)** См. статью Н.Вагутена «Сопряженные числа». Рассмотрите «сопряженные» числа  $(1 \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{3})^n$ .

**521. (8–79)** Сумма равна 88.

**522. (8–79)** Нет.

**523. (8–79)** б) Начинаящий.

**524. (8–79)** Рассмотрите разность данных чисел.

**525. (8–79)** Достаточно рассмотреть плоскости, содержащие общий перпендикуляр двух скрещивающихся ребер.

**527. (8–79)** Линейная функция достигает экстремума на концах отрезка.

**528. (9–79)** Можно 8 способами (расстояния сохраняются: рассмотрите их сумму).

**529. (9–79)** Рассмотрите: а) треугольник; б) тетраэдр наибольшей площади.

**530. (10–79)** Рассмотрите сумму по модулю 2 клеток вместе с их соседями (считая единицами черные, нулями – белые клетки).

**532. (2–80)** См. статью Н.Вагутена «Сопряженные числа».

**534. (10–79)** Заметьте, что площадь треугольника не меняется, если двигать вершину параллельно основанию.

**535. (8–87)** См. статью Н.Васильева «Гексаграммы Паскаля и кубические кривые».

**536. (10–79)** б) Второе покрытие можно строить отдельно в каждом квадрате  $2 \times 2$ .

**537. (10–79)** Рассмотрите гомотетию с центром  $A$  и коэффициентом  $\cos^2(\angle A/2)$ .

**538. (11–79)**  $f(240) = 388$ ;  $f(n) = \left\lceil \frac{1 + \sqrt{5}n}{2} \right\rceil$  для любого  $n$ .

Рассмотрите прямую  $y = \frac{1 + \sqrt{5}x}{2}$  и ее пересечения с единичными клетками.

**539. (11–79)** Сфера, концентричная данной. Решите сначала аналогичную задачу на плоскости.

**540. (12–79)** Заметим сначала, что одна из стран представлена не менее 330 участниками; среди их найдутся 66, представляющих одну из других стран, и т.п.

**541. (12–79)** б) Не всегда (нужно, чтобы не было «перешейков», при разрезании которых «граф распадается»).

**542. (12–79)** б) Это центр преобразования подобия, переводящего гипотенузу в высоту.

**543. (12–79)** Рассмотрите центральную проекцию прямой на окружность (с центром в одной из точек окружности).

**544. (12–79)** Вершин  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ . Хотя бы из одной из двух соседних вершин можно провести указанную диагональ.

**545. (11–81)** См. статью В.Гальперина и Г.Гальперина «Освещение плоскости прожекторами».

**546. (1–80)** Рассмотрите вторые точки пересечения прямых  $MP$  и  $RT$  с окружностью.

**547. (1–80)** Если  $n = pq$ , то можно взять  $x = n - p$ .

**548. (1–80)** Удобно использовать векторы.

**549. (1–80)** Можно от  $N$  перейти (по индукции) к  $Np^k$ , где  $p$  – простое, не делящее  $n$ .

**550. (1–80)** За время, равное  $\frac{d}{v} \frac{m}{n} + \frac{d}{u} \frac{n-m}{n}$ .

**551. (2–80)** б) Точек  $n - 2$ .

**552. (2–80)** Это пары  $(4, 4)$ ;  $(5, 6)$ ;  $(n, -n - 1)$ .

**553. (2–80)** Проведите в окружности с центром в точке  $K$  (центре вписанной окружности), проходящей через центр описанной окружности, хорды, параллельные сторонам. Они дают треугольник, равный треугольнику  $DAE$ .

**554. (2–80)** Если  $n$  – хорошее, то  $2n + 2$  и  $2n + 9$  – тоже хорошие.

**555. (2–80)** Объем пересечения равен: а)  $\frac{16r^3}{3}$ ; б)  $\frac{r^3(8 - 5\sqrt{2})}{\sqrt{3}}$ .

**556. (2–80)** Нет.

**557. (3–80)** Рассмотрите наибольший из минимальных простых делителей этих чисел.

**558. (3–80)** Оцените сумму длин «запрещенных» каждым сектором углов поворота.

**559. (3–80)** Левая часть неравенства равна  $\left| \frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz} \right|$ .

**561. (3–80)** Площадь равна  $\frac{(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})^2}{4}$ .

**563. (4–80)** Рассмотрите функции  $\operatorname{arctg} f(x)$ .

**564. (4–80)** а), в) Точки  $M$  – произвольные; б)  $M$  – середина стороны или основание высоты.

**565. (4–80)** Рассмотрите многочлен  $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$  – его коэффициенты и его производные.

**566. (5–80)** Это  $1/5$ .

**567. (5–80)** Число  $\frac{i+j}{p+q}$  лежит между  $\frac{i}{p}$  и  $\frac{j}{q}$ . Можно провести прямые  $x = 1$ ,  $y = b$ ,  $x + y = c$  на плоскости  $Oxy$  и посмотреть, как они делят отрезок от  $(0, 0)$  до  $(p, q)$ .

**568. (6–80)** Это можно доказывать «от противного» (с помощью неравенств).

**569. (5–80)** Из дробей вида  $\frac{k}{2^n}$  получите дроби  $\frac{1}{q}$ ,  $\frac{2}{q}$ , ...,  $\frac{q-1}{q}$  (различными способами: «спуском», по индукции).

**570. (6–80)** Можно уменьшить стороны квадратов до чисел вида  $\frac{1}{2^n}$ . Более точную оценку: 3 вместо 4 – доказывать значительно труднее.

**571. (6–80)** Можно уточнить оценку: 2 вместо 3.



**573. (7–80)** Можно использовать векторы и скалярные произведения.

**574. (6–80)** а) 1101 000 1101 0000000000 1101. б) Из последовательностей с длинами  $m$  и  $n$  можно сконструировать последовательность длиной  $(2n - 1)(m - 1) + n$ .

**575. (7–80)** Можно, расставив фишки  $M_0, \dots, M_k$  в некоторые из данных точек так, что расстояния  $M_i M_{i+1}$  отличаются не более чем на 1, передвигать их таким образом, чтобы это условие сохранялось.

**576. (7–80)** Можно записать данные векторы как разности векторов, начинающихся в некоторой точке.

**577. (7–80)**  $2n$  при четном  $n$  и  $2n + 1$  – при нечетном.

**578. (8–80)** Обратное преобразование задается почти теми же формулами (с заменой знака).

**580. (8–80)** Если пересадить того, у кого в данной палате не менее 2 врагов, в другую, общее число пар врагов уменьшится.

**581. (8–80)** а) Да. б) Нет.

**582. (8–80)** Проведите из конца стороны хорду, перпендикулярную этой стороне.

**584. ((8–80)** Да (семейства образующих гиперboloида).

**585. (11–80)** См. статью П.Блехера «О людях правдивых, лгунах и обманщиках».

**587. (8–80)** Нет (посчитайте суммы квадратов).

**588. (8–80)** Для треугольника эта сумма равна 2.

**589. (8–80)** Решение задачи б) опирается на такую лемму: из трех векторов с длинами не больше 1 сумма или разность некоторых двух также имеет длину не больше 1.

**590. (8–80)** Для решения пункта в) надо использовать тот факт, что если  $|\cos 2^k x| < \frac{1}{2}$ , то  $|\cos 2^{k+1} x| \geq \frac{1}{2}$  и их сумма не меньше 1.

**591. (8–80)** Эта сумма равна  $\frac{1}{600} + \frac{1}{601} + \dots + \frac{1}{1329}$ . Осталось заметить, что  $660 + 1319 = 661 + 1318 = \dots = 1979$ .

**592. (8–80)** Можно использовать теорему синусов.

**594. (8–80)** Это числа  $a = k^2$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$ .

**595. (2–80)** См. статью Н.Вагутена «Сопряженные числа».

**596. (9–80)** Можно сначала доказать, что ребра одного основания окрашены одинаково.

**597. (8–80)** в) Нижняя оценка следует из того, что  $x_{mn} - \ln(mn) \leq x_n - \ln n$  и  $x_m - \ln m > \gamma$ .

**599. (9–80)** а) 5; б) 1979.

**600. (10–80)** а) Велосипедисты находятся все время на одной (равномерно вращающейся) прямой, проходящей через вторую точку пересечения окружностей. Можно обе задачи решать и аналитически.

**601. (10–80)** Рассмотрите гомотетию описанной окружности с коэффициентом  $1/2$  и центром в ортоцентре треугольника.

**602. (11–80)** См. статью А.Аврамова «Арифметические прогрессии в треугольнике Паскаля». Номера строк таковы:  $n = k^2 - 2$ ,  $k$  – целое.

**603. (10–80)** Можно умножить уравнения на  $y$  и на  $x$  (соответственно) и сложить.

**605. (11–80)** Можно использовать векторы (или координаты). Для пункта в):  $n^2 + n + 1$ ,  $C_{2n+1}^n$ .

**606. (11–80)** Период равен 8.

**607. (11–80)** в) Удобнее начать с равнобедренных треугольников.

**608. (11–80)** Площадь  $4m$ -угольника имеет ту же четность, что и  $m$ .

**609. (12–80)** в) Разрежьте многогранник на мелкие горизонтальные слои. Можно использовать неравенство Коши

$$\left( \int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

**610. (12–80)** Наборам можно сопоставить лесенки (диаграммы Юнга) на клетчатой бумаге: числа набора задают высоту ступеней (от пола).

**612. (1–81)** Рассмотрите число, количество цифр в котором кратно периоду.

**614. (1–81)** б)  $S(abc) = a(50a + 10b + c + 851) + b(5b + c + 41) + \frac{c(c+1)}{2}$ .

**616. (2–81)** в)  $nk$  нечетно или  $k$  четно.

**617. (2–81)** Рассмотрите гомотетию, переводящую данный треугольник в треугольник с вершинами в центрах трех кругов.

**618. (2–81)** Попробуйте искать нужные  $n$  среди чисел  $n = 2k^2$ .

**619. (2–81)** Выберите на стороне  $CD$  точку  $K$  такую, что  $DK = DA$ , и проведите через точки  $A, B, K$  окружность.

**620. (2–81)** Найдите сумму квадратов этих  $2^n$  чисел.

**621. (2–81)** Используйте равенство отрезков касательных.

**622. (3–81)** Выразите эти числа через количество  $l$  представлений  $k = x^3 + y^2$  ( $k = 0, 1, \dots$ ).

**623. (3–81)** Симметричный образ одной оси относительно другой – тоже ось симметрии.

**624. (3–81)**  $a_n = n$ , если  $n = 2^m$ , и  $a_n = 0$  в остальных случаях.

**625. (10–80)** См. статью Ю.Михеева «Одной линейкой».

**626. (3–81)** Рассмотрите сначала случай  $n = 2$ ; разбейте клетки на треугольники.

**629. (6–81)** См. статью Н.Васильева и Т.Маликова «Рассмотрим разность».

**630. (4–81)** Это прямая; найдите разность квадратов расстояний от  $M$  до  $K$  и до центра окружности.

**632. (4–81)** Погрузите сначала контейнеры массой более  $1/2$  тонны.

**633. (4–81)** Возможны два случая: либо хорда проходит на расстоянии  $R/\sqrt{2}$  от центра круга ( $R = AC/2$ ), либо она перпендикулярна  $AC$ .

**634. (4–81)** б) Рассмотрите наибольшее  $m$ , для которого  $m + S(m) < n$ .

**635. (4–81)** Рассмотрите множество коротышек, которые заболевают (впервые) в  $k$ -й день.

**636. (5–81)** Это множество  $\{1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$ .

**637. (5–81)** Углы равны  $60^\circ, 90^\circ, 30^\circ$  (во всех случаях).

**638. (5–81)** Красных клеток 33.

**639. (5–81)** Постройте сферу с диаметром  $AB$ .

**640. (5–81)** б) Можно. в) Небольшие группы единиц среди быстро растущих серий нулей.

**641. (6–81)** Рассмотрите поворот вокруг  $O$  на  $60^\circ$ .

**643. (6–81)** Проследите за числом инверсий среди пар соседних карточек.

**645. (7–81)** Это – одна из наиболее тонких и трудных «задач на преследование». Изучите, как меняется множество возможных положений преступника, когда Варнике попеременно углубляется то в один, то в другой коридор. (Можно доказать, что оценка  $1/7$  – точная.)

**646. (7–81)** Спроектируйте разности соседних векторов на вектор  $s - r$ .

**647. (7–81)** Можно использовать функцию  $x^2 + \sqrt{x}$ , она выпукла вниз при  $x \geq 1/4$ .

**648. (7–81)** Середины сторон – вершины прямоугольника. (Сравните с задачей 539.)

**650. (7–81)** а) – в) Да; г) нет.

**652. (7–81)** Да.

**653. (7–81)** Используйте теорему о высотах треугольника.

**654. (7–81)** Нет.

**655. (7–81)** Полезно представить ситуацию в виде лесенки, высота  $k$ -й ступеньки которой равна числу томов в стопке, и изобразить ее на клетчатой бумаге (на плоскости  $Oxy$ ). Все диагонали  $x + y = c$ , кроме последней, постепенно заполнятся клетками, изображающими тома.

**656. (8–81)** Посчитайте площадь шапочек на сфере.

**658. (8–81)** Оцените сумму длин границ всех отрезков.

**660. (8–81)** Остаток при делении на 3 суммы  $k_1 - k_2 + k_3 - \dots - k_4 + \dots$ , где  $k_i$  – длины серий красных точек, один из инвариантов нашего преобразования.

**663. (9–81)** Только  $p = 3$  (остаток при делении на 3).

**664. (9–81)** Удобно использовать свойства косого (псевдоскалярного) произведения векторов  $[u, v] = uv \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – угол между векторами.

**665. (9–81)** б) Число узоров равно  $2^{m+n-1}$ .

**668. (10–81)** Можно двигаться не только вперед, но и назад!

**670. (10–81)** Рассмотрите два экземпляра этого множества: пусть преобразования происходят на них попеременно (а соседями служат точки другого экземпляра). Проследите за числом пар разноцветных соседей.

**673. (11–81)** б) Нет (проследите за ориентацией треугольника  $ABC$ ).

**674. (11–81)** Рассмотрите поворотную гомотетию (подобие) с центром в точке пересечения высот треугольника  $ABC$ , переводящую его в треугольника  $A_1B_1C_1$ .

**676. (12–81)** Используйте признаки делимости на 9 и на 11.

**678. (12–81)** Можно доказывать это по индукции.

**679. (12–81)** б) Докажите, что четыре точки касания лежат в одной плоскости.

**680. (12–81)** б) При  $n = 6$ ,  $n = 4k + 1$  и  $n = 4k + 2$  выигрывает второй: в остальных случаях – первый. Нужно следить за количеством четных и нечетных компонентов связности.

**681. (1–82)** б) Да. Набор строится по индукции.

**682. (1–82)** а) Надо начинать построение с меньшего треугольника. б) Да.

**683. (1–82)** Индукция (рассмотрите кружок, лежащий с краю).

**684. (1–82)** Здесь две разные задачи: если корабли могут иметь общие (граничные) точки, то ответ  $2n - 1$ ; если нет – то

$$\left\lceil \frac{4n + 2}{3} \right\rceil.$$

**685. (1–82)** Можно. Удобно использовать двоичную систему счисления.

**686. (2–82)** Да.

**687. (2–82)** а) Рассмотрите 5 вершин основания, из которых идут ребра одного цветка. б) Нет.

**688. (2–82)** Можно использовать индукцию (рассмотрев случаи  $a_n = a_{n+1}$  и  $a_n \neq a_{n+1}$ ).

**689. (2–82)** Посчитайте число острых и тупых углов.

**690. (2–82)** а) Рассмотрите круг максимального радиуса, содержащийся в многоугольнике.

**691. (3–82)** б) Число  $m^2 + m + 1$  расположено (строго) между двумя квадратами.

**692. (3–82)** Точные оценки:  $\frac{7}{12} < \frac{P_1}{P} < \frac{3}{4}$ . Их можно получить из неравенства треугольника.

**693. (3–82)** Можно (выкинув часть ребер) превратить граф, изображающий распространение новости, в дерево и рассмотреть самые далекие вершины.

**694. (3–82)** В первом и третьем случаях – нельзя (рассмотрите разность между суммами чисел в четверках несмежных вершин); во втором – можно.

**695. (3–82)** Нет. Оцените долю клеток, содержащихся в строках (или столбцах), где они составляют большинство.

**697. (4–82)** Сумма пазатостей не меньше площади квадрата.

**699. (4–82)** в) Угол  $EDF$  равен  $\pi/4$ .

**700. (4–82)** а) Нельзя; б) можно.

**701. (5–82)** Рассмотрите поворот треугольника  $LMN$  вокруг точки  $L$  на  $60^\circ$ .

**702. (5–82)** Можно использовать лишь тот факт, что  $p_{n+1} - p_n \geq 2$  (при  $n > 1$ ) и  $p_1 = 2$ .

**703. (5–82)**  $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}, \left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1\right\}$ .

**704. (5–82)** Докажите, что при повороте квадрата на  $90^\circ$  перпендикуляры, о которых говорится в условии, переходят друг в друга.

**705. (5–82)** а) Это можно доказать для любой фигуры из нескольких клеток. б), в) Нет.

**707. (6–82)** Существует не более чем три кружка, в одном из которых занимается каждый ученик.

**708. (6–82)** Величина  $4(S_1 - S)$  равна сумме квадратов диагоналей.

**709. (6–82)** Можно увидеть в этих покрытиях изображение куба  $10 \times 10 \times 10$ , частично заполненного единичными кубиками.

**710. (6–82)** а) – г) Да. Примеры удобно строить, составляя последовательности из (быстро растущих по длине) пачек – арифметических прогрессий. д) Нет.

**711. (7–82)** Опустите перпендикуляры из центра четырехугольника на диагонали.

**712. (7–82)** Рассмотрите 17 данного числа.

**713. (7–82)** Не более 3.

**714. (7–82)** Наименьшее число, большее  $\log_2 N$ : а) 6; б) 7; в) 7.

**715. (7–82)** См. статью А.Ходулева «Расселение фишек». а) Да; б), в) – нет.

**716. (7–82)** В центре вписанной окружности.

**718. (7–82)** Это  $1597^2 + 987^2$ . Пара  $(m, n)$  – соседние числа ряда Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

**719. (7–82)** а)  $n > 6$ ; б)  $3 \leq n \leq 6$ .

**721. (8–82)** Площадь равна  $25/9$ .

**722. (8–82)** б) Для  $n \cdot 2^{n-2}$  расстановок. Отметьте на окружности положения чисел 1 и  $n$ .

**723. (8–82)** Да. Можно предъявить его, а можно использовать понятие «плотности» подмножества  $A \subset N$  (предела отношения числа элементов  $A \cap \{1, 2, \dots, n\}$  к  $n$ ).

**724. (8–82)** Сначала рассмотрите черепях, ползущих из одной точки.

**725. (8–82)** Эти косинусы – корни многочлена третьей степени с рациональными коэффициентами.

**726. (8–82)** Удобно рассмотреть (при нечетном  $n$ ) пересечение двух симметричных относительно общего центра правильных  $n$ -угольников.

**727. (8–82)** В данном случае  $(1-a)(1-b)(1-c) > 0$ .

**728. (8–82)** Удобно сдвинуть две вершины параллельно  $PQ$  в точки, лежащие вместе с  $P$  в плоскости, перпендикулярной прямой  $PQ$ .

**729. (8–82)** Только 3 (заметим, что  $3^6 = 729$ ).

**730. (8–82)** б) При четном  $k$  число  $2k$  встретится 4 раза, при нечетном – 2.

**731. (9–82)** а) Начинаящий; б) его партнер.

**733. (9–82)** а)  $m = 1, 2, 4, 6, 8$ ; б) можно взять  $k = 2^n$ ,  $n > m$ .

**734. (9–82)** Рассмотрите точку, симметричную  $B$  относительно  $AK$ .

**735. (9–82)** Сначала удобнее решать пункт б).

**736. (9–82)** Через  $L$  проведите отрезок, параллельный  $BK$ .

**737. (9–82)** Изобразите все это на клетчатой бумаге, упорядочив дома по количеству жителей.

**738. (9–82)** График проекции, как функции угла поворота, состоит из кусков синусоид.

**739. (10–82)** Константа равна  $C_n = (-1)^{(n-1)/2}$ . Рассмотрите данные отношения как отношения многочленов от  $t = \operatorname{tg} x$  (см. также задачи 100, 135).

**740. (10–82)** Отношение равно  $\frac{3\pi}{2} - 1 \approx 3,7$  (если считать пшено «сплошным»).

**741. (10–82)** Таких чисел шесть.

**742. (10–82)** Удобнее всего использовать векторы и скалярные произведения.

**743. (10–82)** а) Индукция. б) Рассмотрите наибольшее и второе по величине множества городов, соединенных одним видом транспорта.

**744. (10–82)** Рассмотрите центр подобия: через него проходят все 6 окружностей.

**745. (10–82)** б), в) Да, но в пункте в) требуется константа  $\frac{3}{2}$  (вообще, для  $m - k$  чисел с суммой 0 константа равна  $2 - \frac{2}{m}$ ).

**746. (11–82)** Под углом: а)  $\frac{\pi}{8}$ ; б)  $\arctg \frac{3}{4}$  к стороне.

**747. (11–82)** Можно вывести пункт б) из пункта а) с помощью проекции на прямую и усреднения (см. статью Ю.Ионина и А.Плоткина «Средние значения функций»; 7–77).

**748. (11–82)** Рассмотрите множество всех направлений в пространстве и сферу большого радиуса.

**749. (11–82)** б) Можно действовать по индукции, считая  $x_{n+1}$  наименьшим.

**750. (12–82)** Используйте принцип Дирихле (см. статью В.Болтянского «Шесть зайцев в пяти клетках»; 2–77); в пунктах в), г) удобно рассмотреть цепочку квадратов, идущих по диагонали!

**751. (12–82)** Рассмотрите пары диаметрально противоположных точек (среди  $6k$  точек, делящих окружность на равные дуги): если утверждение неверно, то ровно одна из них – конец дуги.

**752. (12–82)** Рассмотрите цепочки клеток, соединяющие наибольшее и наименьшее числа: а) в таблице; б) в каждом столбце и каждой строке.

**753. (12–82)** Порядок таков:  $a < b < c$ .

**754. (12–82)** а) Нет (при некоторых  $x, y, z$  левая часть равна 0). б) Да; представьте 1 как сумму линейных одночленов, встречающихся в условии, и возведите это равенство в высокую степень.

**755. (12–82)** Здесь, как и в задаче 742, можно использовать векторы и скалярные произведения.

**756. (12–82)** Если порвать связи со столицей  $M$ , то в каждую из образующихся групп городов из  $M$  ведут не менее двух линий.

**757. (12–82)** Ответ на все вопросы: да.

**758. (12–82)** Можно вычеркнуть 43 числа.

**759. (1–83)** а) Может. б) Лемма: функция, сопоставляющая точке  $M$  прямой сумму расстояний до нескольких других (на плоскости или в пространстве), выпукла вниз.

**760. (1–83)** Используйте векторы и тот факт, что  $2^k - 1$  при некотором  $k$  делится на (нечетное)  $m$ .

**762. (7–85)** См. статью С.Дворянинова и М.Ясиного «Как получаются симметричные неравенства». Более общая задача: неравенство Мюрхеда.

**763. (1–83)** Отношение равно  $k^2$ ;  $Q$  – центр преобразования подобия, переводящего точку  $A$  в  $O$ , а точку  $O$  – в  $D$ .

**764. (1–83)** Их можно искать, считая  $x, y, z$  степенями одного числа.

**765. (2–83)** Разбейте плоскость на «страны» со «столицами» в точках  $B$ .

**766. (2–83)** Подсчитайте остатки при делении на 9.

**767. (2–83)** а) Сравните многоугольник с «наихудшим» – треугольником с той же проекцией. б) Сравните площадь треугольника с кусочками, лежащими в углах за его вершинами.

**768. (2–83)** Можно записывать числа по очереди в одну из трех групп так, чтобы суммы в группах отличались не более чем на 1. (Сравните с задачей 575.)

**769. (2–83)** Используйте теорему синусов и формулу

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

**770. (3–83)** Сложите грани вместе и рассмотрите точки на сторонах угла.

**771. (2–83)** Углы равны  $72^\circ, 36^\circ, 72^\circ$ .

**772. (2–83)** Понадобится 20000 рублей.

**773. (2–83)** Используйте равенство касательных.

**774. (2–83)** а) Рассмотрите значения в точках  $x = \frac{k}{2^n}$ .



д) Функция Дирихле: 0 в рациональных и 1 в иррациональных точках.

**775. (3–83)** При  $n = 4k$  и  $n = 4k - 1$ . Рассмотрите сумму разностей соседних чисел (сумма их модулей равна  $\frac{n(n+1)}{2}$ ).

**776. (3–83)**  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**777. (3–83)** а) Вместе с решением  $(x, y)$  есть решение  $(y - x, -x)$ .

**778. (3–83)** Докажите, что  $S_i S_j \parallel A_i A_j$ .

**779. (3–83)** Справедливо неравенство  $\frac{x_{k-1}^2}{x_k} \geq 4(x_{k-1} - x_k)$ .

**780. (4–83)** Рассмотрите начальный кусок ломаной, содержащий точки, близкие к двум соседним вершинам, и его дополнение.

*Задачник «Кванта»*

## Математика

Часть 1

*Под редакцией Н.Б.Васильева*

Библиотечка «Квант» Выпуск 92

Приложение к журналу «Квант» №6/2005

Редактор *В.А.Тихомирова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 77

Формат 84×108 1/32 Бум офсетная Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная Объем 6 печ л Тираж 4000 экз

Заказ № **5643.**

119296 Москва, Ленинский пр , 64-А, «Квант»

Тел (095)930-56-48, e-mail admin@kvant info

Опечатаано в ОАО Ордена Трудового Красного Знамени  
«Чеховский полиграфический комбинат»

142300 г Чехов Московской области

Тел /факс (501)443-92-17, тел /факс (272)6-25-36,

e-mail chpk\_marketing@chehov ru

**ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ  
СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»**

- 1 *М.П.Бронштейн* Агомы и электроны
- 2 *М.Фарадей* История свсчи
- 3 *О.Оре* Приглашение в теорию чисел
- 4 Опыты в домашней лаборатории
- 5 *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов* Задачи по физике
- 6 *Л.П.Мочалов*. Головоломки
- 7 *П.С.Александров*. Введение в теорию групп
- 8 *В.Г.Штейнгауз* Математический калейдоскоп
- 9 Замечательные ученые
- 10 *В.М.Глушков, В.Я.Валах* Что такое ОГАС?
- 11 *Г.И.Копылов* Всего лишь кинематика
- 12 *Я.А.Сморodinский* Температура
- 13 *А.Е.Карпов, Е.Я.Гук* Шахматный калейдоскоп
- 14 *С.Г.Гиндикин* Рассказы о физиках и математиках
- 15 *А.А.Боровой* Как регистрируют частицы
- 16 *М.И.Каганов, В.М.Цукерник* Природа магнетизма
- 17 *И.Ф.Шарыгин* Задачи по геометрии планиметрия
- 18 *Л.В.Тарасов, А.Н.Тарасова* Беседы о преломлении света
- 19 *А.Л.Эфрос* Физика и геометрия беспорядка
- 20 *С.А.Пикин, Л.М.Блинов* Жидкие кристаллы
- 21 *В.Г.Болтянский, В.А.Ефремович* Наглядная топология
- 22 *М.И.Башимаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой*. Задачи по математике алгебра и анализ
- 23 *А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров* Введение в теорию вероятностей
- 24 *Е.Я.Гук* Шахматы и математика
- 25 *М.Д.Франк-Каменецкий* Самая главная молекула
- 26 *В.С.Эдельман* Вблизи абсолютного нуля
- 27 *С.Р.Филонович* Самая большая скорость
- 28 *Б.С.Бокштейн* Атомы блуждают по кристаллу
- 29 *А.В.Бялко* Наша планета – Земля
- 30 *М.Н.Аршинов, Л.Е.Садовский*. Коды и математика
- 31 *И.Ф.Шарыгин* Задачи по геометрии: стереометрия
- 32 *В.А.Займовский, Т.Л.Колупаева* Необычные свойства обычных металлов
- 33 *М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками
- 34 *В.Н.Дубровский, Я.А.Сморodinский, Е.Л.Сурков* Релятивистский мир
- 35 *А.А.Михайлов* Земля и ее вращение
- 36 *А.П.Пурмаль, Е.М.Слободецкая, С.О.Травин* Как превращаются вещества
- 37 *Г.С.Воронов* Штурм термоядерной крепости
- 38 *А.Д.Чернин* Звезды и физика
- 39 *В.Б.Брагинский, А.Г.Полнарев* Удивительная гравитация
- 40 *С.С.Хилькевич* Физика вокруг нас
- 41 *Г.А.Звенигородский* Первые уроки программирования
- 42 *Л.В.Тарасов* Лазеры действительность и надежды
- 43 *О.Ф.Кабардин, В.А.Орлов* Международные физические олимпиады школьников

- 44 Л.Е.Садовский, А.Л.Садовский Математика и спорт
- 45 Л.Б.Окунь  $\alpha\beta\gamma$ . Z элементарное введение в физику элементарных частиц
- 46 Я.Е.Гегузин Пузыри
- 47 Л.С.Марочник Свидание с кометой
- 48 А.Т.Филиппов Многоликий солитон
- 49 К.Ю.Богданов Физик в гостях у биолога
- 50 Занимательно о физике и математике
- 51 Х.Рачлис Физика в ванне
- 52 В.М.Липунов В мире двойных звезд
- 53 И.К.Кикоин Рассказы о физике и физиках
- 54 Л.С.Понтрягин Обобщения чисел
- 55 И.Д.Данилов Секреты программируемого микрокалькулятора
- 56 В.М.Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах
- 57 А.А.Силин Трение и мы
- 58 Л.А.Ашкинази. Вакуум для науки и техники
- 59 А.Д.Чернин Физика времени
- 60 Задачи московских физических олимпиад
- 61 М.Б.Балк, В.Г.Болтянский. Геометрия масс
- 62 Р.Фейнман Характер физических законов
- 63 Л.Г.Асламазов, А.А.Варламов Удивительная физика
- 64 А.Н.Колмогоров Математика – наука и профессия
- 65 М.Е.Левинштейн, Г.С.Симин. Барьеры от кристалла до интегральной схемы
- 66 Р.Фейнман КЭД – странная теория света и вещества
- 67 Я.Б.Зельдович, М.Ю.Хлопов Драма идей в познании природы
- 68 И.Д.Новиков. Как взорвалась Вселенная
- 69 М.Б.Беркинблит, Е.Г.Глаголева Электричество в живых организмах
- 70 А.Л.Стасенко Физика полета
- 71 А.С.Штейнберг Репортаж из мира сплавов
- 72 В.Р.Полищук Как исследуют вещества
- 73 Л.Кэрролл. Логическая игра
- 74 А.Ю.Гросберг, А.Р.Хохлов Физика в мире полимеров
- 75 А.Б.Мигдал Квантовая физика для больших и маленьких
- 76 В.С.Гетман. Внуки Солнца
- 77 Г.А.Гальперин, А.Н.Земляков Математические бильярд
- 78 В.Е.Белонучкин. Кеплер, Ньютон и все-все-все .
- 79 С.Р.Филонович Судьба классического закона
- 80 М.П.Бронштейн. Солнечное вещество
- 81 А.И.Буздин, А.Р.Зильберман, С.С.Кротов Раз задача, два задача ..
- 82 Я.И.Перельман Знаете ли вы физику?
- 83 Р.Хонсбергер. Математические изюминки
- 84 Ю.Р.Носов Дебют оптоэлектроники
- 85 Г.Гамов. Приключения мистера Томпкинса
- 86 И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов Задачи по физике (2-е изд.)
- 87 Физика и
- 88 А.В.Спивак. Математический праздник
- 89 Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий. Задачи и не только по физике
- 90 П.Гнэдиг, Д.Хоньек, К.Райли Двести интригующих физических задач
- 91 А.Л.Стасенко Физические основы полета



Индексы

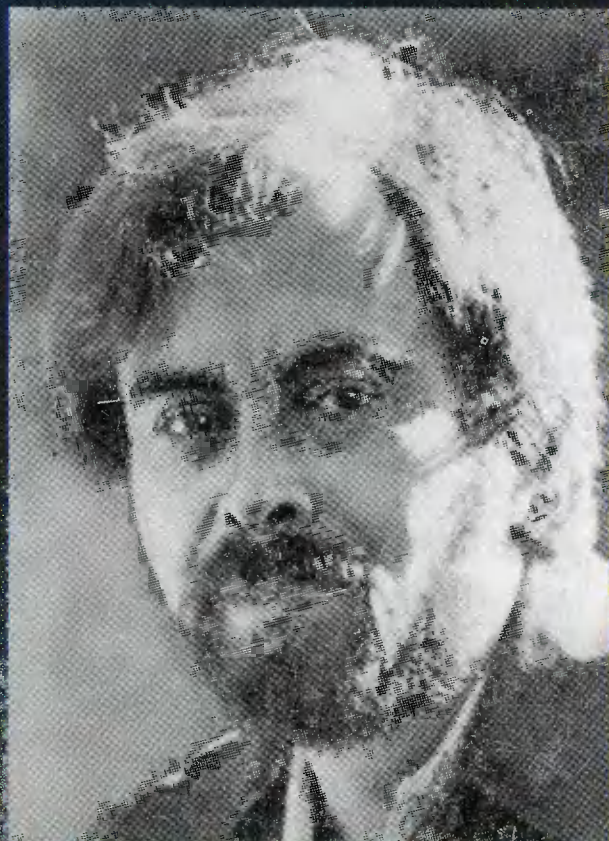
84499 - по каталогу «Роспечать»

26043 - по каталогу «Пресса России»



63

# Библиотечка КВАНТ



Николай Борисович Васильев (1940 – 1998) окончил механико-математический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова, работал в Лаборатории математических методов в биологии МГУ. Будучи великолепно образованным математиком, тонко чувствуя красоту этой науки, он внес неоценимый вклад в дело математического просвещения в России. Н.Б.Васильев активно участвовал в работе школьных математических кружков при МГУ, входил в состав жюри и оргкомитетов Московских, Всероссийских и Всесоюзных математических

олимпиад, он был одним из организаторов ОП ВЭМШ – знаменитой заочной школы, инициатором возрождения сборников «Математическое просвещение».

Имя Н.Б.Васильева неразрывно связано с историей журнала «Квант». Он основал один из важнейших разделов этого журнала – «Задачник «Кванта» – и руководил им в течение почти тридцати лет. Придуманные им оригинальные и красивые задачи выделяются отточенностью формулировок и решений, глубиной и связью с «большой» математикой. Вместе с тем, он уделял много сил и внимания молодым, начинающим авторам, помогая найти наиболее привлекательную формулировку, обнаружить возможные обобщения и дальнейшее развитие сюжета задачи. Разумеется, работа Н.Б.Васильева в «Кванте» не ограничивалась «Задачником». Им написано более тридцати статей, без сомнения, входящих в число лучших научно-популярных публикаций.

ВЫПУСК

92